

# المتميز

الجزء النظري  
و  
حلول التمارين  
الوحدة الأولى

في  
الرياضيات التطبيقية  
الديناميكا

$$u = v \times h$$

$$ش = ق \cdot \frac{ق}{ق} \cdot ع$$

$$ض = ن \cdot ع$$

$$ع = ع + ح \cdot ن$$

الصف الثالث الثانوي  
القسم العلمي  
شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشننوري

## الوحدة الأولى .... الحركة فى خط مستقيم

## ١ - ١ تفاضل الدوال المتجهة

١ - ١

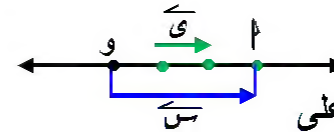
## [١] الحركة فى خط مستقيم :

إذا تحرك جسم فى خط مستقيم يقال أنه يتحرك حركة خطية

## [٢] موضع الجسم :

عندما يتحرك جسم حركة خطية فإنه عند أى لحظة زمنية  $t$  سيشغل موضع معين على الخط المستقيمو لتعيين الموضع  $s$  لجسم متحرك عند أى لحظة زمنية  $t$  نختار نقطة ثابتة "و" على الخط المستقيم كنقطة أصل و نحدد اتجاه موجب على طول الخط

فمثلاً :



فى الشكل المقابل :

عندما : يكون الجسم عند الموضع (P) على

الخط المستقيم فإن :  $s = s_3$  حيث : $\vec{u}$  متجه وحدة فى اتجاه و  $\vec{P}$  " اتجاه الحركة "

بينما :

فى الشكل المقابل :

إذا كان : الجسم عند الموضع B على

الخط المستقيم فإن :  $s = -s_4$  حيث :

لاحظ :

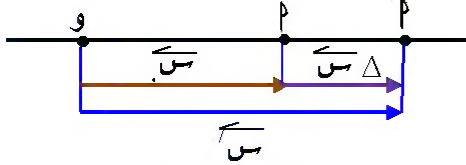
موضع الجسم كمية متجهة ، و يمكن التعبير عنه كدالة فى الزمن

 $s = s(t)$  أى أن :و يقاس معيار  $s$  فى النظام الدولى للوحدات بالمتر

## [٣] متجه الازاحة :

تعرف ازاحة الجسم  $\vec{f}$  بأنها التغير فى متجه موضعه

فى الشكل المقابل :



إذا تحرك الجسم من الموضع

(P) إلى الموضع (P')

الخط المستقيم فإن :

الازاحة  $\vec{f} = \vec{s} - \vec{s}_0$  حيث :  $\vec{s} = \vec{s}_1$ فى هذه الحالة  $\vec{s}$  تكون موجبة حيث أن موضع الجسم النهائى

(P') على يمين موضع الجسم الابتدائى (P)

أما إذا كان موضع الجسم النهائى على يسار موضع الجسم الابتدائى

فإن  $\vec{s}$  تكون سالبة

## ملاحظات :

(١) ازاحة الجسم  $\vec{f}$  كمية متجهة و يمكن التعبير عنه كدالة فىالزمن  $t$  أى أن :  $\vec{f} = \vec{f}(t)$ 

(٢) معيار الازاحة هو طول القطعة المستقيمة الموجهة من نقطة

البداية إلى نقطة النهاية بصرف النظر عن المسار الذى تحرك

فيه الجسم

(٣) المسافة كمية قياسية موجبة تمثل المسار الكلى المقطوع

بواسطة الجسم

(٤) معيار الازاحة  $\geq$  المسافة الكلية(٥) يمكن استخدام الرموز  $s$  ،  $f$  للتعبير عن القياس الجبرىلمتجه الموضع  $s$  و لمتجه الازاحة  $f$  على الترتيب

(٦) إذا كان موضع الجسم عند بداية قياس الزمن عند نقطة الأصل

فإن :  $s = \vec{s}$  و يكون :  $f = \vec{f}$

(V) إذا عاد الجسم إلى موضعه الابتدائى فإن :  $f = 0$

#### [4] متجه السرعة :

إذا كانت :  $f = \Delta s$  هي إزاحة الجسم خلال فترة زمنية  $\Delta t$  فإن : متجه السرعة المتوسطة  $\vec{v}$  يساوى خارج قسمة متجه الإزاحة على الزمن أى أن :

$$\vec{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

و يعرف متجه السرعة اللحظية  $\vec{v}$  عند أى لحظة زمنية بالعلاقة :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

و من تعريف المشتقة يستنتج أن :  $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$

( ميل المماس لمنحنى الموضع - الزمن ) ، وحيث أن :  $s$  متجهاً ثابتاً فإن : متجه السرعة يساوى معدل تغير الإزاحة بالنسبة للزمن

أى أن :  $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$  ( ميل المماس لمنحنى الإزاحة - الزمن )

و يحسب معيار متجه السرعة بوحدة م / ث فى النظام الدولى للوحدات

#### ملاحظة :

يمكن استخدام الرمز  $v$  للتعبير عن القياس الجبرى لمتجه السرعة  $\vec{v}$

و تكون :  $v = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \vec{v} \cdot \frac{\text{الإزاحة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}}$  ،

حيث :  $\vec{v}$  متجه وحدة فى اتجاه الحركة

#### [5] السرعة :

إذا كان :  $\vec{v}$  ( متجه سرعة جسم يتحرك فى خط مستقيم فإن : السرعة هي الكمية القياسية التى تعبر عن معيار متجه السرعة

أى أن : السرعة =  $||\vec{v}|| = ||\frac{\Delta s}{\Delta t}|| = ||\frac{ds}{dt}||$

و إذا كان :  $v$  هو القياس الجبرى لمتجه السرعة ،  $s$  هو القياس الجبرى لمتجه الموضع فإن :

$$v = ||\vec{v}|| = ||\frac{ds}{dt}|| = \left| \frac{ds}{dt} \right|$$

أى أن :  $v = \frac{ds}{dt}$

#### ملاحظة :

إذا وصل الجسم إلى أقصى بعد ( أقصى ارتفاع )

فإن :  $v = 0$

#### [6] العجلة :

إذا كان :  $\vec{a}$  تعبر عن التغير فى متجه السرعة خلال فترة زمنية  $\Delta t$  فإن : العجلة المتوسطة  $\vec{a}$  تعطى بالعلاقة :

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

و تعرف العجلة اللحظية  $\vec{a}$  ( العجلة اختصاراً ) عند أى لحظة

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

و من تعريف المشتقة يستنتج أن :  $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

## القياس الجبرى لمتجه السرعة و العجلة :

- (١) إذا كانت :  $d < .$  فإن :  
 ع تتزايد و العكس صحيح  
 أى أن إذا كانت : ع تتزايد  
 فإن :  $d < .$  " موجبة "  
 و هذا يعنى أن : الجسم  
 يتحرك بشكل أسرع فى  
 الاتجاه الموجب شكل (١)  $d < .$   
 و أن : الجسم يتحرك ببطء أكثر فى الاتجاه السالب شكل (٢)  
 فى الحالتين :  $\Delta ع < .$

- (٢) إذا كانت :  $d > .$  فإن :  
 ع تتناقص و العكس صحيح  
 أى أن إذا كانت :  
 ع تتناقص فإن :  
 $d > .$  " سالبة "  
 و هذا يعنى أن : الجسم  
 يتحرك ببطء أكثر فى الاتجاه  
 الموجب شكل (٣)  $d > .$   
 و أن : الجسم يتحرك بشكل أسرع فى الاتجاه السالب شكل (٤)  
 فى الحالتين :  $\Delta ع > .$

أى أن : العجلة هى معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن  
 ( ميل المماس لمنحنى السّواعة - الزمن )

و يحسب معيار متجه العجلة بوحدة م / ث / ث ( م / ث<sup>٢</sup> )  
 فى النظام الدولى للوحدات

مما سبق نجد أن : إذا كانت  $\overline{s}$  ( موضع الجسم ) و هى دالة  
 فى الزمن  $t$  فإن : متجه السرعة  $\overline{v} = \frac{d\overline{s}}{dt}$  و من ذلك يمكن  
 استنتاج أن : العجلة  $\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\overline{s}}{dt} \right) = \frac{d^2\overline{s}}{dt^2}$

أى : العجلة  $\overline{a} =$  المشتقة الأولى لمتجه السرعة  
 $=$  مشتقة المشتقة الأولى لمتجه الموضع  
 $=$  المشتقة الثانية لمتجه الموضع

## تنبيه :

عند الإشارة إلى القياسات الجبرية لكل من متجهات الموضع و السرعة  
 و العجلة تستخدم الرموز  $s$  ،  $v$  ،  $a$  على الترتيب

## ملاحظات :

- (١) إذا تحرك الجسم بأقصى سرعة أو سرعة منتظمة ( ثابتة )  
 فإن :  $a = 0$   
 (٢) درجة  $s$  (  $t$  ) = درجة  $v$  (  $t$  ) ،  
 درجة  $v$  (  $t$  ) = درجة  $a$  (  $t$  ) - ١ ،  
 درجة  $a$  (  $t$  ) = درجة  $v$  (  $t$  ) - ١ ،  
 = درجة  $s$  (  $t$  ) - ٢

(٣) فى كل من الشكلين (١) ، (٤) يقال أن : الجسم يتحرك أسرع ( يتسارع ) ، بينما فى كل من الشكلين (٢) ، (٣) يقال أن : الجسم يتحرك بتقصير ( يتباطأ )

أى أن :  
الجسم يتحرك حركة متسارعة إذا كان :  $\vec{a} > 0$  ،  $\vec{v} > 0$   
لهما نفس الاتجاه (  $\vec{a} > 0$  )  
و يتحرك حركة تقصيرية إذا كان :  $\vec{a} < 0$  ،  $\vec{v} < 0$   
متضادين فى الاتجاه (  $\vec{a} < 0$  )

طرق تعيين فترات الحركة المتسارعة و فترات الحركة التقصيرية :

(١) بيانياً :

كما سيأتى فى دراسة كل من :  
( منحنى الإزاحة - الزمن ) ،  
و مثله تماماً ( منحنى السرعة - الزمن ) ،  
( منحنى العجلة - الزمن )

(٢) جبرياً :

(١) دراسة إشارة كل :  $\vec{a}$  ،  $\vec{v}$  ،  $\vec{a} \cdot \vec{v}$  كدوال فى  $t$   
كما سبق فى دراسة إشارة الدالة ( الصف الأول الثانوى )  
أو بالتعويض عن قيم  $t$  فى كل فترة تتغير فيها الحركة  
ثم تحديد إشارة :  $\vec{a}$  ،  $\vec{v}$  ،  $\vec{a} \cdot \vec{v}$

(٢) حل المتباينتين :

$\vec{a} > 0$  . للحركة المتسارعة

" الحركة المتسارعة تعنى :

الجسم يتحرك بسرعة تزايدية إلى الأمام

أو بسرعة تناقصية إلى الخلف "

$\vec{a} < 0$  . للحركة التقصيرية

" الحركة التقصيرية تعنى :

الجسم يتحرك بسرعة تزايدية إلى الخلف

أو بسرعة تناقصية إلى الأمام "

استنتاج العجلة عندما يكون متجه السرعة دالة فى الموضع :

إذا كانت :  $\vec{a} = d(\vec{v})/dt$  ،  $\vec{v} = d(\vec{r})/dt$  فإن :

باستخدام قاعدة السلسلة نستنتج :  $\vec{a} = d(\vec{v})/dt = d(\vec{v})/d(\vec{r}) \times d(\vec{r})/dt$

أى أن :  $\vec{a} = \vec{v} \cdot d(\vec{v})/d(\vec{r})$

و هى صورة أخرى للعجلة يمكن استخدامها عندما يكون متجه السرعة  $\vec{v}$  دالة فى الموضع  $\vec{r}$



## دراسة الأشكال البيانية لحركة جسم :

أولاً : دراسة سلوك الدالة :

لدراسة سلوك الدالة : ف =  $\frac{v}{t} = 9 + 12v - 3v^2$ نوجد : ع =  $\frac{v}{t} = 9 + 12v - 3v^2 = 0 \Rightarrow (3 - v)(1 - v) = 0$ بوضع : ع = 0 . يكون :  $v = 1$  ،  $v = 3$ 

بدراسة إشارة ع كما بالشكل التالى نجد :

$v$	0	1	3	$\infty$
إشارة ع = د (v)	+	+	-	-
سلوك ف = د (v)	تزايدية	تناقصية	تناقصية	تزايدية
ف = د (v)		4	0	
		قيمة عظمى محلية	قيمة صغرى محلية	

## (1) تزايد و تناقص الدالة :

[1] الدالة ف = د (v) تزايدية فى [ 0 ، 1 ] ، [ 3 ،  $\infty$  ]

[2] الدالة ف = د (v) تناقصية فى [ 1 ، 3 ]

## (2) نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

[1] للدالة ف = د (v) نقطة قيمة عظمى محلية عند :  $v = 1$ حيث عند :  $v > 1$  تكون : الدالة تزايدية، عند :  $v < 1$  تكون : الدالة تناقصية[2] للدالة ف = د (v) نقطة قيمة صغرى محلية عند :  $v = 3$ حيث عند :  $v > 3$  تكون : الدالة تناقصية، عند :  $v < 3$  تكون : الدالة تزايديةنوجد : ح =  $\frac{v}{t} = 12 - 6v = 0 \Rightarrow v = 2$ بوضع : ح = 0 . يكون :  $v = 2$ 

بدراسة إشارة ح كما بالشكل التالى نجد :

$v$	0	2	$\infty$
إشارة ح = د (v)	-	+	+
تحدب ف = د (v)	لأعلى	لأسفل	لأسفل
ف = د (v)		2	
		نقطة انقلاب	

## (3) تحدب منحنى الدالة و نقط الانقلاب :

[1] فى [ 0 ، 2 ] : يكون منحنى الدالة ف (v) محدباً لأعلى

لأن : المشتقة الثانية للدالة ف (v) سالبة أى :  $v > 2$ [2] فى [ 2 ،  $\infty$  ] : يكون منحنى الدالة ف (v) محدباً لأسفللأن : المشتقة الثانية للدالة ف (v) موجبة أى :  $v < 2$ [3] عند :  $v = 2$  تنعدم المشتقة الثانية للدالة ف (v) موجبة

أى : ح = 0 ، يتغير تحدب المنحنى

لذا تسمى النقطة ( 2 ، 2 ) نقطة انقلاب

## طريقة أخرى لتحديد نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

نلاحظ عند :  $v = 1$  ،  $v = 3$ تنعدم المشتقة الأولى للدالة ف (v) أى :  $\frac{v}{t} = 0$  و بالتالى : ع = 0

" ميل المماس = 0 ( المماس أفقى ) " كما يكون :

[1] عند :  $v = 1$  تكون المشتقة الثانية للدالة ف (v) سالبة أى :و بالتالى :  $v > 1$  و بالتالى :  $v < 1$

(٢) نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية :

[1] للدالة  $f = d(n)$  نقطة قيمة عظمى محلية عند :  $n = 1$

[2] للدالة  $f = d(n)$  نقطة قيمة صغرى محلية عند :  $n = 3$

(٣) تحذب منحنى الدالة و نقط الانقلاب :

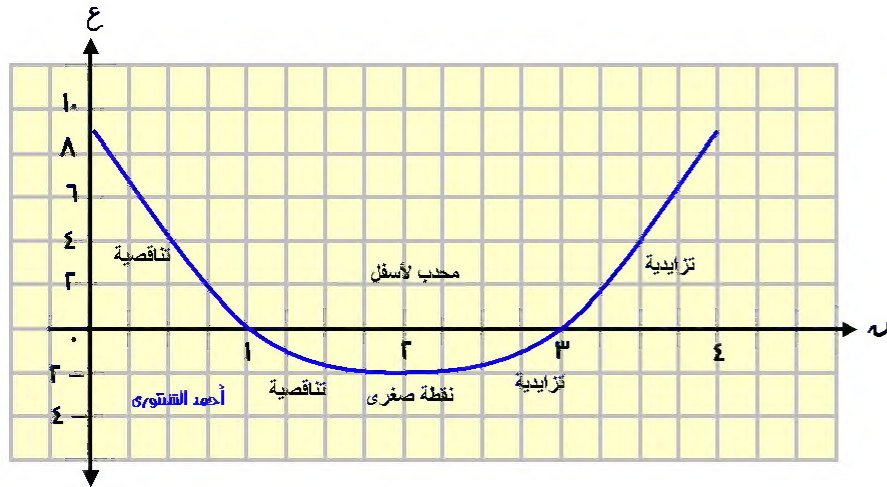
[1] فى [ ٢ ، ٠ ] : يكون منحنى الدالة  $f(n)$  محدباً لأعلى

[2] فى [ ٢ ، ∞ ] : يكون منحنى الدالة  $f(n)$  محدباً لأسفل

[3] النقطة ( ٢ ، ٢ ) نقطة انقلاب

(٢) المنحنى التالى يمثل : ( منحنى السرعة - الزمن )

حيث :  $E = \frac{v^2}{a} = 9 + 12n - 3n^2 = \frac{v^2}{a} = (3 - n)(1 - n)$



(٣) المنحنى التالى يمثل : ( منحنى العجلة - الزمن )

حيث :  $C = \frac{v^2}{a} = 12 - n = \frac{v^2}{a} = (2 - n)$

لذا تسمى النقطة ( ١ ، ٤ ) نقطة قيمة عظمى محلية

[٢] عند :  $n = 3$  تكون المشتقة الثانية للدالة  $f(n)$  موجبة أى :

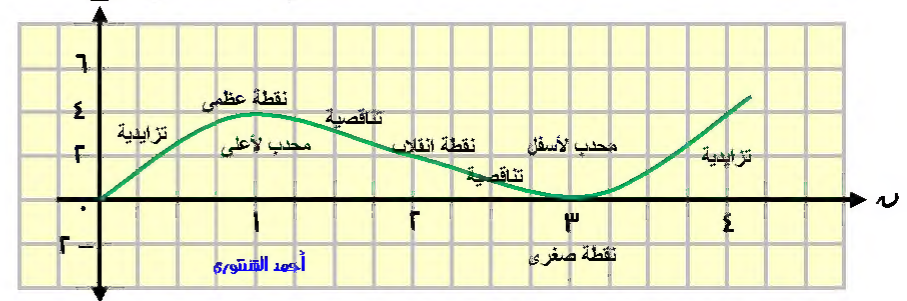
$$\frac{f''(n)}{f'(n)} < 0 \quad \text{و بالتالى : } C < 0$$

لذا تسمى النقطة ( ٣ ، ٠ ) نقطة قيمة صغرى محلية

ثانياً : التمثيل البياني لمنحنيات دالة ما و المشتقتين الأولى و الثانية لهذه الدالة :

(١) المنحنى التالى يمثل : ( منحنى الازاحة - الزمن )

حيث :  $f = 9n + n^2 - 3n^3 = f'(3 - n)$



و من دراسة سلوك الدالة يوضح الشكل كل من :

(١) تزايد و تناقص الدالة :

[1] الدالة  $f = d(n)$  تزايدية فى [ ٠ ، ١ ] ، تناقصية فى [ ١ ، ٣ ] ، تزايدية فى [ ٣ ، ∞ ]

لاحظ : ميل المماس فى كل فترة موجب حيث :

عند رسم المماس عند كل نقطة تنتمى للفترة نجد أنه يصنع زاوية حادة

مع الاتجاه الموجب لمحور  $n$  و بالتالى فإن :

المشتقة الأولى للدالة  $f(n)$  تكون موجبة أى أن :  $C > 0$

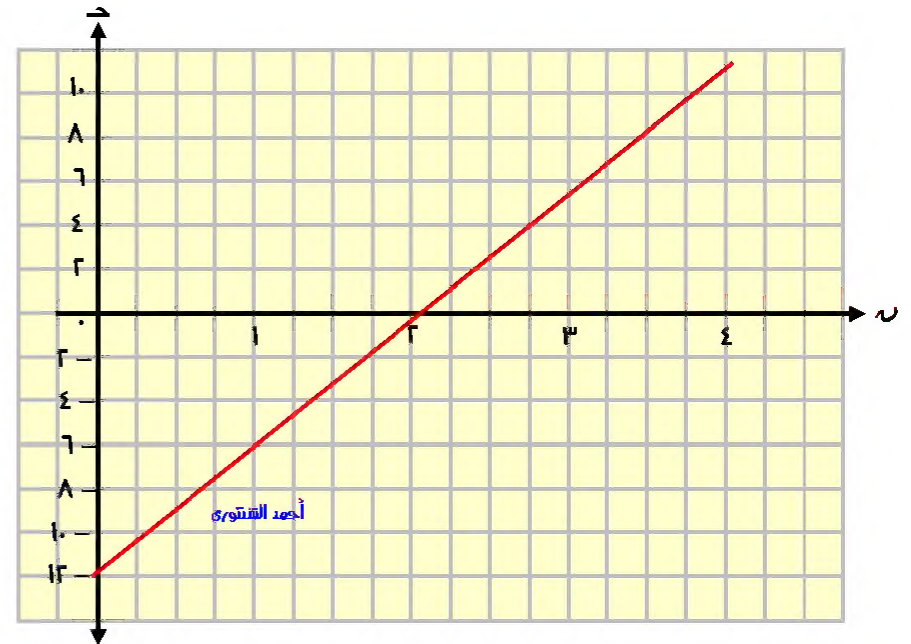
[2] الدالة  $f = d(n)$  تناقصية فى [ ١ ، ٣ ] ، تزايدية فى [ ٣ ، ∞ ]

لاحظ : ميل المماس فى كل فترة سالب حيث :

عند رسم المماس عند كل نقطة تنتمى للفترة نجد أنه يصنع زاوية منفرجة

مع الاتجاه الموجب لمحور  $n$  و بالتالى فإن :

المشتقة الأولى للدالة  $f(n)$  تكون سالبة أى أن :  $C < 0$



## ملاحظات :

- (١) من دراسة سلوك الدالة يمكن دراسة و تمثيل المشتقة الأولى للدالة بيانياً أو العكس بمعنى من المشتقة الأولى للدالة يمكن دراسة و تمثيل الدالة الأصلية بيانياً
- (٢) الازاحة عند لحظة زمنية  $t$  هي :
- الاحداثى الرأسى (محور ف) للنقطة التى احداثيتها الأفقى  $t$
- (٣) الازاحة خلال فترة ما هي المساحة المحصورة بين منحنى ( السرعة - الزمن ) و محور ( $t$ )
- (٤) المسافة هي مجموع القيم المطلقة للازاحات المختلفة عند كل تغير فى اتجاه الحركة
- (٥) المسافة خلال فترة ما هي مجموع القيم المطلقة للازاحات المختلفة خلال هذه الفترة

أحمد الشنتوري

v

(٦) من منحنى الدالة : ف = د ( $t$ ) نجد :

- [١] إذا كان المنحنى متزايد فإن الحركة تكون فى الاتجاه الموجب و يكون ميل المماس للمنحنى موجب "  $a > 0$  " " الجسم يتحرك للأمام أو لأعلى "
- [٢] إذا كان المنحنى متناقص فإن الحركة تكون فى الاتجاه السالب و يكون ميل المماس للمنحنى سالب "  $a < 0$  " " الجسم يتحرك للخلف أو لأسفل "
- [٣] السرعة تنعدم "  $a = 0$  " عند نقط القيم العظمى أو الصغرى للمنحنى و عندها يتغير اتجاه الحركة
- لاحظ : ميل منحنى ( الازاحة - الزمن ) أو ( الموضع - الزمن ) عند لحظة زمنية ما يساوى سرعة الجسم عند نفس اللحظة
- [٤] العجلة تنعدم "  $a = 0$  " عند نقط الانقلاب للمنحنى "
- (٧) من منحنى الدالة : ع = د ( $t$ ) نجد :
- [١] إذا كان المنحنى يقع أعلى محور ( $t$ ) فإن السرعة تكون موجبة أى أن : الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة
- [٢] إذا كان المنحنى يقع أسفل محور ( $t$ ) فإن السرعة تكون سالبة أى أن : الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة
- [٣] السرعة تنعدم "  $a = 0$  " عند نقط التقاطع مع محور ( $t$ )
- [٤] إذا كان المنحنى متزايد فإن ميل المماس يكون موجب و بالتالى تكون العجلة موجبة "  $a > 0$  "
- [٥] إذا كان المنحنى متناقص فإن ميل المماس يكون سالب و بالتالى تكون العجلة سالبة "  $a < 0$  "
- [٦] العجلة تنعدم "  $a = 0$  " عند نقط القيم العظمى و الصغرى للمنحنى " لاحظ : ميل منحنى ( السرعة - الزمن ) = العجلة
- [٧] السرعة تتزايد إذا كان المنحنى يقع أعلى محور ( $t$ ) وميله موجب أو أسفل محور ( $t$ ) وميله سالب و تكون : ع  $< 0$  .
- أى أن : حركة الجسم متسارعة



[٨] السرعة تباطأ إذا كان المنحنى يقع أعلى محور (v) وميله سالب

أو أسفل محور (v) وميله موجب و تكون :  $د > ع$  .

أى أن : حركة الجسم تقصيرية

(٨) من منحنى الدالة :  $د = د(v)$  نجد :

[١] إذا كان المنحنى يقع أعلى محور (v) فإن العجلة تكون موجبة

[٢] إذا كان المنحنى يقع أسفل محور (v) فإن العجلة تكون سالبة

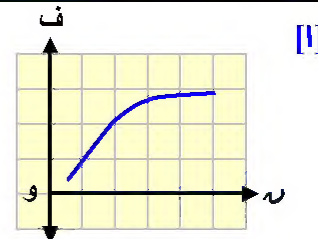
[٣] العجلة تنعدم عند نقط تقاطع المنحنى مع محور (v)

(٩) الجسم يتحرك على خط مستقيم

و لا يتحرك على من المنحنيات السابقة

دراسة بعض الأشكال لحركة جسم من خلال ( منحنى الازاحة - الزمن ) :

(١) فى الشكلين التاليين :



∴ المنحنى يقع أعلى محور v

∴  $ف < ع$  .

∴ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴  $ع < د$  ∴ الجسم يتحرك فى

نفس اتجاه الحركة

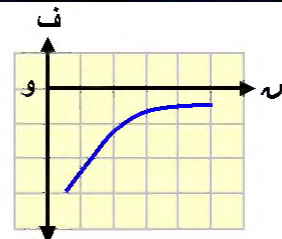
∴  $ف < ع$  ∴ الجسم يبتعد

عن نقطة بدء الحركة

∴ المنحنى محدب لأعلى

∴  $د > ع$  ∴  $ع > د$  .

∴ الحركة تقصيرية



∴ المنحنى يقع أسفل محور v

∴  $ف > ع$  .

∴ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴  $ع < د$  ∴ الجسم يتحرك فى

نفس اتجاه الحركة

∴  $ف < ع$  ∴ الجسم يقترب

من نقطة بدء الحركة

∴ المنحنى محدب لأعلى

∴  $د > ع$  ∴  $ع > د$  .

∴ الحركة تقصيرية

(٢) فى الشكل المقابل :

∴ المنحنى يقع أعلى محور v ∴  $ف < ع$  .

∴ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴  $ع > د$  ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة

∴  $ف < ع$  .

∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور v ∴  $ف > ع$  .

∴ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴  $ع > د$  ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة

∴  $ف < ع$  ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

∴  $و$  فى كلا الحالتين : ∴ المنحنى محدب لأعلى ∴  $د > ع$  .

∴  $ع < د$  ∴ الحركة متسارعة

(٣) فى الشكل المقابل :

∴ المنحنى يقع أعلى محور v ∴  $ف < ع$  .

∴ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴  $ع > د$  ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة

∴  $ف < ع$  .

∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور v ∴  $ف > ع$  .

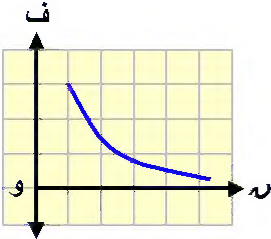
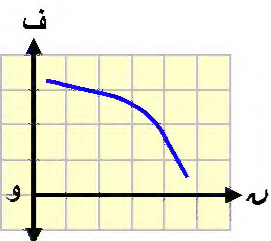
∴ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب

∴  $ع > د$  ∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة

∴  $ف < ع$  ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

∴  $و$  فى كلا الحالتين : ∴ المنحنى محدب لأسفل ∴  $د < ع$  .

∴  $ع > د$  ∴ الحركة تقصيرية



## (٤) [١] فى الشكل المقابل :

∴ المنحنى يقع أعلى محور  $v$  ∴  $f < 0$  .

∴ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴  $f < 0$  ∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة

∴  $f < 0$  ∴

∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  ∴  $f > 0$  .

∴ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب

∴  $f < 0$  ∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة

∴  $f > 0$  ∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

∴  $f < 0$  ∴ **و فى كلا الحالتين :** ∴ المنحنى محدب لأسفل ∴  $d < 0$  .

∴  $f < 0$  ∴ الحركة متسارعة

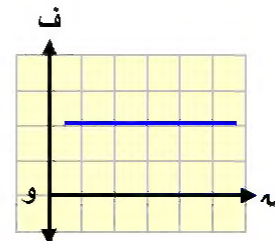
## (٥) فى الشكل المقابل :

∴ المنحنى يمثل دالة ثابتة

∴ الميل = ٠

∴  $f = 0$

∴ الجسم متوقف

(٦) [١] الشكل المقابل يمثل منحنى يقع أعلى محور  $v$  ∴  $f < 0$  .

∴ المنحنى يمثل دالة خطية ∴ منحنى  $f$  دالة ثابتة ∴  $d = 0$  .

∴ المنحنى متزايد ∴ الميل  $< 0$  ∴  $f < 0$  .

∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

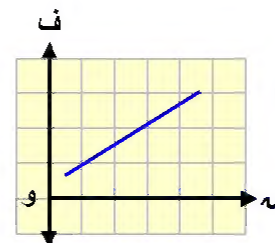
∴  $f < 0$  ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  ∴  $f > 0$  .

∴ المنحنى متزايد ∴ الميل  $< 0$  ∴  $f < 0$  .

∴ الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

∴  $f > 0$  ∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

(٧) [١] الشكل المقابل يمثل منحنى يقع أعلى محور  $v$  ∴  $f < 0$  .

∴ المنحنى يمثل دالة خطية ∴ منحنى  $f$  دالة ثابتة ∴  $d < 0$  .

∴ المنحنى متناقص ∴ الميل  $> 0$  ∴  $f > 0$  .

∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

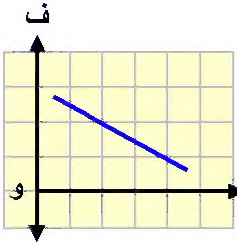
∴  $f > 0$  ∴ الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  ∴  $f > 0$  .

∴ المنحنى متناقص ∴ الميل  $> 0$  ∴  $f > 0$  .

∴ الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة بسرعة منتظمة

∴  $f < 0$  ∴ الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة

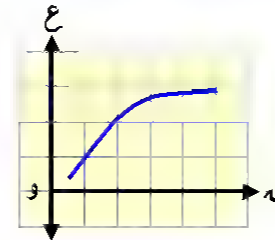


ملخص ما سبق بالجدول التالى :

منحنى $f = d$ (دالة تربيعية أو تكعيبية أو ....)		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور $v$ فإن : $f < 0$ .	أسفل محور $v$ فإن : $f > 0$ .
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : $f < 0$ . و الجسم يتحرك فى نفس اتجاه الحركة	متناقص فإن : $f > 0$ . و الجسم يتحرك فى عكس اتجاه الحركة
إذا كان :	فإن : الجسم يبتعد عن نقطة بدء الحركة $f < 0$ .	فإن : الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة $f > 0$ .
إذا كان : المنحنى	محدب لأسفل فإن : $d < 0$ .	محدب لأعلى فإن : $d > 0$ .
إذا كان :	فإن : الحركة متسارعة $f < 0$ .	فإن : الحركة تقصيرية $f > 0$ .

إذا كان : منحنى $f = d(v)$ دالة خطية فإن : منحنى $E(v)$ يمثل دالة ثابتة		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور $v$ فإن : $f < .$	أسفل محور $v$ فإن : $f > .$
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : $E < .$ ، والجسم يتحرك بسرعة منتظمة في نفس اتجاه الحركة	متناقص فإن : $E > .$ ، والجسم يتحرك بسرعة منتظمة في عكس اتجاه الحركة
إذا كان :	فإن : الجسم يبتعد من نقطة بدء الحركة	فإن : الجسم يقترب من نقطة بدء الحركة
إذا كان : منحنى $f = d(v)$ دالة ثابتة فإن : $E = .$ : الجسم متوقف		

دراسة بعض الأشكال لحركة جسم من خلال ( منحنى السرعة - الزمن ) :



(1) [1] في الشكل المقابل :  
 : المنحنى يقع أعلى محور  $v$  :  $E < .$   
 ، : المنحنى متزايد : الميل موجب  
 :  $E < .$

: الحركة متسارعة

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

[2] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  :  $E > .$

، : المنحنى متزايد : الميل موجب :  $E < .$

:  $E > .$  : الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "

(2) [1] في الشكل المقابل :

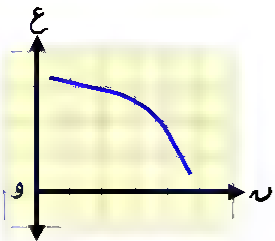
: المنحنى يقع أعلى محور  $v$  :  $E < .$

، : المنحنى متناقص : الميل سالب

:  $E > .$

: الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "



(3) [1] في الشكل المقابل :

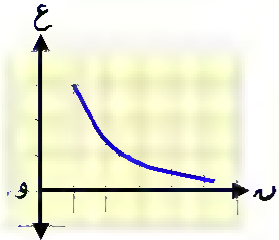
: المنحنى يقع أعلى محور  $v$  :  $E < .$

، : المنحنى متناقص : الميل سالب

:  $E > .$

: الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "



[2] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  :  $E > .$

، : المنحنى متناقص : الميل سالب :  $E > .$

:  $E < .$  : الحركة متسارعة

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

(4) [1] في الشكل المقابل :

: المنحنى يقع أعلى محور  $v$  :  $E < .$

، : المنحنى متزايد : الميل موجب

:  $E < .$

: الحركة متسارعة

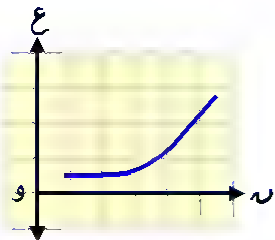
" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

[2] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  :  $E > .$

، : المنحنى متزايد : الميل موجب :  $E < .$

:  $E > .$  : الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "



[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  .:  $E > 0$  .

، : المنحنى متناقص : الميل سالب

.:  $E > 0$  . :  $E < 0$  .

.: الحركة متسارعة

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

ملخص ما سبق بالجدول التالى :

منحنى $E = d(v)$ دالة تربيعية أو تكعيبية أو ....		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور $v$ فإن : $E < 0$ .	أسفل محور $v$ فإن : $E > 0$ .
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : $E < 0$ .	متناقص فإن : $E > 0$ .
إذا كان :	$E < 0$ . فإن : الحركة متسارعة	$E > 0$ . فإن : الحركة تقصيرية

إذا كان : منحنى $E = d(v)$ دالة خطية فإن : منحنى $d(v)$ يمثل دالة ثابتة		
إذا كان : المنحنى يقع	أعلى محور $v$ فإن : $E < 0$ .	أسفل محور $v$ فإن : $E > 0$ .
إذا كان : المنحنى	متزايد فإن : $E < 0$ .	متناقص فإن : $E > 0$ .
إذا كان :	$E < 0$ . فإن : الحركة متسارعة	$E > 0$ . فإن : الحركة تقصيرية
إذا كان : منحنى $E = d(v)$ دالة ثابتة فإن : $E = 0$ .		
إذا كان : المنحنى يقع	فإن : الجسم يتحرك بسرعة منتظمة فى نفس اتجاه الحركة	فإن : الجسم يتحرك بسرعة منتظمة فى عكس اتجاه الحركة

أحمد الشنتوي

(٥) [١] فى الشكل المقابل :

.: المنحنى يقع أعلى محور  $v$  .:  $E < 0$  .

، : دالة المنحنى ثابتة : الميل = 0 .:  $E = 0$  .

.: الجسم يتحرك بسرعة منتظمة ( ثابتة )

فى نفس اتجاه الحركة

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  .:  $E > 0$  .

.: الجسم يتحرك بسرعة منتظمة ( ثابتة ) فى عكس اتجاه الحركة

(٧) فى الشكل المقابل :

.: المنحنى يقع على محور  $v$

.:  $E = 0$  .

.: الجسم متوقف

(٨) [١] فى الشكل المقابل :

.: المنحنى يقع أعلى محور  $v$  .:  $E < 0$  .

، : المنحنى متزايد : الميل موجب

.:  $E < 0$  . :  $E < 0$  .

.: الحركة متسارعة

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتزايد "

[٢] إذا كان : المنحنى يقع أسفل محور  $v$  .:  $E > 0$  .

، : المنحنى متزايد : الميل موجب .:  $E < 0$  .

.:  $E > 0$  . : الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "

(٩) [١] فى الشكل المقابل :

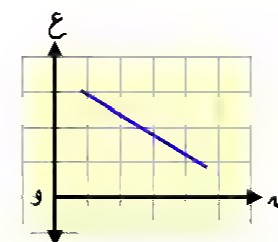
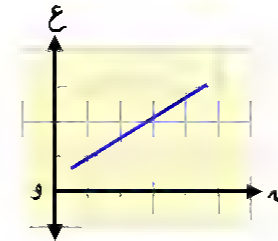
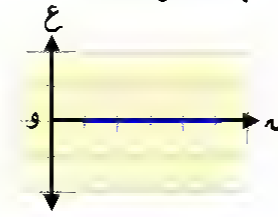
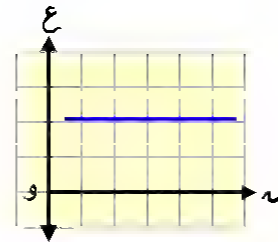
.: المنحنى يقع أعلى محور  $v$  .:  $E < 0$  .

، : المنحنى متناقص : الميل سالب

.:  $E > 0$  . :  $E > 0$  .

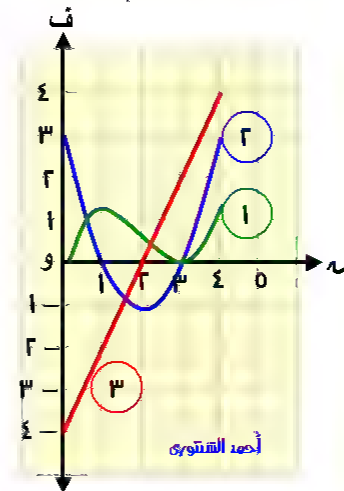
.: الحركة تقصيرية

" لاحظ أن : مقدار السرعة يتناقص "





تحديد منحنيات (الموضع - الزمن) ، ( السرعة - الزمن ) ،  
( العجلة - الزمن ) من شكل :



بملاحظة الشكل المقابل نجد :

بالنسبة للمنحنى (1) :

عند  $t = 1$  توجد قيمة عظمى

، عند  $t = 3$  توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (2) :

عند  $t = 1$  توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (3) :

لا توجد قيم عظمى أو صغرى

∴ درجة دالة المنحنى (1) =

درجة دالة المنحنى (2) + 1 ،

درجة دالة المنحنى (3) = درجة دالة المنحنى (1) + 3

∴ المنحنى (1) يمثل منحنى الموضع - الزمن ،

المنحنى (2) يمثل منحنى السرعة - الزمن ،

المنحنى (3) يمثل منحنى العجلة - الزمن

و بطريقة أخرى :

بالنسبة للمنحنى (1) :

فى [ ٠ ، ١ ] ، [ ٣ ، ٤ ] : المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور  $t$  فى هاتين الفترتين

عند  $t = 1$  ،  $t = 3$  : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هاتين النقطتين = ٠

فى [ ١ ، ٣ ] : المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور  $t$  فى هذه الفترة

و المنحنى (2) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (1) = درجة دالة المنحنى (2) + 1

بالنسبة للمنحنى (2) بالإضافة لما سبق و ما حققه نلاحظ :

فى [ ٠ ، ٢ ] : المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور  $t$  فى هذه الفترة

عند  $t = 1$  : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هذه النقطة = ٠

فى [ ٣ ، ٤ ] : المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور  $t$  فى هذه الفترة

و المنحنى (3) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (2) = درجة دالة المنحنى (3) + 1

مما سبق يتضح : المنحنى (1) يمثل منحنى الموضع - الزمن ،

المنحنى (2) يمثل منحنى السرعة - الزمن ،

المنحنى (3) يمثل منحنى العجلة - الزمن

### إجابة تفكير ناقد صفحة ١٣١

كيف نحسب من المنحنى السابق السرعة - الزمن فى مثال (1)  
المسافة المقطوعة خلال رحلة الحجر  
حتى عودته إلى نقطة القذف  
و كذلك إزاحته خلال هذا الزمن ؟

الحل

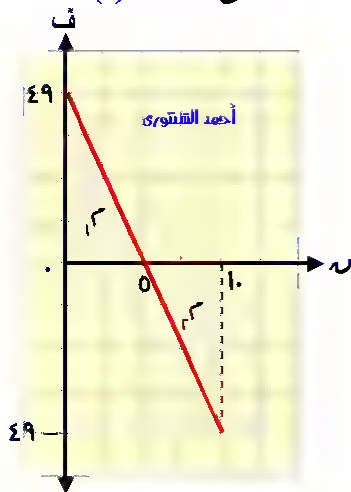
المسافة = المساحة  $M_1$  + المساحة  $M_2$

$$29 \times 0 \times \frac{1}{2} + 29 \times 0 \times \frac{1}{2} =$$

$$122,0 + 122,0 = 244 \text{ متر}$$

الإزاحة = المساحة  $M_1$  - المساحة  $M_2$

$$29 \times 0 \times \frac{1}{2} - 29 \times 0 \times \frac{1}{2} =$$



$$= 122,0 - 122,0 = \text{صفر}$$

حل آخر

من العلاقة المعطاة :

$$\therefore s = 29 - 2,9 \quad \therefore f = 29 - 2,9$$

$$\text{المسافة المقطوعة} = |(0) - (0)| + |(0) - (10)| + |(10) - (0)| = 20$$

$$122,0 + 122,0 = 122,0 - 0 + 0 - 122,0 =$$

$$= 240 \text{ متر}$$

$$\text{الازاحة} = |(0) - (0)| - |(0) - (10)| - |(10) - (0)| = 0$$

$$= 122,0 - 122,0 = 0 \text{ صفر}$$

إجابة حاول أن تحل (١) صفحة ١٣١

جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان موضعه  $s$  عند أى لحظة زمنية يعطى بالعلاقة  $s(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t)$  حيث  $s$

مقاسة بالمتر ،  $t$  بالثانية ،  $\vec{v}$  متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسيم

(١) أوجد ازاحة الجسيم خلال الثانى الثلاث الأولى

(ب) أوجد متجه السرعة المتوسطة للجسيم عندما  $t \in [0, 2]$

(ج) أوجد سرعة الجسيم عندما  $t = 2$

(د) من خلال منحنى السرعة - الزمن ، منحنى الموضع - الزمن

قم بتحليل حركة الجسيم و بين متى يغير الجسيم اتجاه حركته

الحل

$$s(0) = 0 = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \quad \text{بالمثل} : s(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 = 0$$

$$(٢) \quad \vec{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 3t^2 + 2t) = 3t^2 - 6t + 2 \quad \text{أى أن} :$$

ازاحة الجسيم خلال الثانى الثلاث الأولى  $s = 0$  متر فى عكس اتجاه حركته

$$(ب) \text{ متجه السرعة المتوسطة} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 0}{2 - 0} = 0$$

$$(ج) \quad \vec{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3 - 3t^2 + 2t) = 3t^2 - 6t + 2$$

و عندما  $t = 2$  فإن  $\vec{v} = 0$

(د) الشكلان المقابلان يوضحان :

منحنى السرعة - الزمن ،

منحنى الموضع - الزمن

من منحنى الموضع - الزمن :

(١) عند بدء الحركة يكون متجه

موضع الجسيم هو  $s = 0$

من نقطة ثابتة (و)

(٢) يتحرك الجسيم نحو (و)

و يصل إليها عند :

$t = 1$  ثم يتحرك خلف (و)

(٣) يسكن الجسيم لحظياً عند  $t = 2$

(٤) يغير الجسيم اتجاه حركته بعد  $t = 2$

(٥) يصل الجسيم لنفس النقطة الثابتة (و) عند  $t = 4$

و يتجاوزها فى الاتجاه المضاد للحركة الذى بدأ فيه

(٦) بدأ الجسيم الحركة بتسارع ثم تباطأ حتى سكن عند لحظياً  $t = 4$

ثم تسارع مرة أخرى

من منحنى السرعة - الزمن :

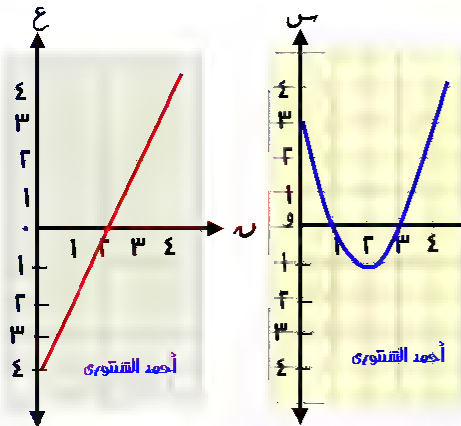
(١) عند بدء الحركة كانت سرعة الجسيم  $v = 2$  م / ث

(٢) تتناقص سرعة الجسيم خلال الفترة الزمنية  $[0, 2]$  حتى يسكن لحظياً

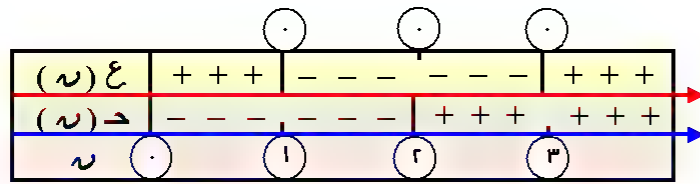
عند  $t = 2$  ثم يغير اتجاه حركته بعدها

(٣) تتزايد سرعة الجسيم خلال الفترة الزمنية  $[2, 4]$  فى الاتجاه المضاد

للحركة الذى بدأ فيه



أحمد الشنتوري



∴ فترات التسارع هي : [ ٢، ١ ] ، [ ٣، ٢ ] لأن : ع ، د لهما نفس الإشارة ، فترات التقصير هي : [ ١، ٠ ] ، [ ٣، ٢ ] لأن : ع ، د مختلفا الإشارة

### إجابة حاول أن تحل (٢) صفحة ١٣٣

إذا كان متجه سرعة جسيم ع يعطى كدالة فى الزمن بالعلاقة :  
 $\vec{v} = (v - v^2 - 1 + 0) \hat{i}$  حيث  $\hat{i}$  متجه وحدة فى اتجاه حركة الجسم

(أ) متى يغير الجسيم حركته ؟

(ب) متى تزداد سرعة الجسيم و متى تتناقص ؟

(د) أوجد عجلة حركة الجسيم عندما تنعدم السرعة

الحل

(أ) يغير الجسيم حركته عندما يسكن لحظياً أى عندما :  $\vec{v} = 0$

$$0 = (v - v^2 - 1 + 0) \Rightarrow v = 1 \text{ أو } v = -1$$

$$v = 1 \text{ ، } v = -1$$

∴ يغير الجسيم حركته عند :  $v = 1$  ، عند :  $v = -1$

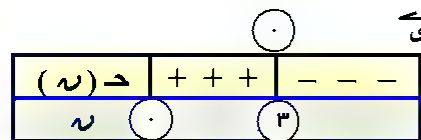
$$(ب) \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v - v^2 - 1 + 0) = (1 - 2v)$$

$$\therefore (1 - 2v) = 0 \Rightarrow v = \frac{1}{2}$$

$$(3 - v) = 0 \Rightarrow v = 3$$

$$\therefore (1 - 2v) < 0 \text{ فى } [3, \infty)$$

$$(1 - 2v) > 0 \text{ فى } (-\infty, \frac{1}{2})$$



$$\therefore \text{ع تزداد فى } [3, \infty)$$

$$\therefore \text{ع تتناقص فى } (-\infty, \frac{1}{2})$$

(٤) ميل الخط المستقيم = عجلة الجسيم =  $\frac{1}{t}$  " ثابتة أى : د موجبة "

(٥) سرعة الجسيم [ ٢، ٠ ] سالبة " المنحنى يقع أسفل محور (v)

، د موجبة لذا فهو يتحرك حركة تقصيرية خلال الفترة الزمنية [ ٢، ٠ ]

(٦) سرعة الجسيم [ ٢، ٠ ] موجبة " المنحنى يقع أعلى محور (v)

، د موجبة لذا فهو يتحرك حركة متسارعة خلال الفترة الزمنية [ ٢، ٠ ]

### إجابة تفكير ناقد صفحة ١٣٣

مستعيناً بالشكل السابق بين فترات التسارع و فترات التقصير لحركة الجسيم

الحل

∴ ع تقع أعلى محور (v) فى [ ١، ٠ ] ، [ ٣، ٢ ]

أسفل محور (v) فى [ ٣، ٢ ]

∴ ع < ٠ فى [ ١، ٠ ] ، [ ٣، ٢ ] ، ع > ٠ فى [ ٣، ٢ ]

∴ د تقع أسفل محور (v) فى [ ٢، ٠ ]

تقع أعلى محور (v) فى [ ٠، ٣ ]

∴ د > ٠ فى [ ٢، ٠ ] ، د < ٠ فى [ ٠، ٣ ]

∴ ع < ٠ فى [ ٢، ١ ] ، [ ٠، ٣ ]

∴ فترات التسارع هي : [ ٢، ١ ] ، [ ٠، ٣ ]

ع > ٠ فى [ ١، ٠ ] ، [ ٣، ٢ ]

∴ فترات التقصير هي : [ ١، ٠ ] ، [ ٣، ٢ ]

حل آخر

بدراسة إشارة كل من ع ، د نجد : ع =  $3 - v^2 - 12v + 9$

$$\therefore ع = 3 - (v^2 - 12v + 9) = 3 - (3 - v)(3 + v)$$

$$، د = 12 - 6v = 6(2 - v)$$

(د)  $\therefore \text{ع} = 0$  . عندما :  $\text{ع} = 1$  ،  $\text{ع} = 0$

$\therefore$  عند :  $\text{ع} = 1$  فإن :  $\text{ح} = \frac{1}{2}$

، عند :  $\text{ع} = 1$  فإن :  $\text{ح} = -\frac{1}{2}$

### إجابة تفكير ناقد صفحة ١٣٤

الشكل المرفق يبين سرعة جسيم  $\text{ع} = \text{د}(\text{ح})$  يتحرك فى خط مستقيم

(ب) متى يتحرك الجسيم للأمام

و متى يتحرك للخلف ؟ و متى

تتزايد سرعته و متى تتباطأ ؟

(ب) متى تكون عجلة الحركة

موجبة ؟ و متى تكون سالبة ؟ و متى تنعدم ؟

(د) متى تصل سرعة الجسيم إلى قيمتها العظمى ؟

(ع) متى يتوقف الجسيم لمدة أكثر من ثانية ؟

الحل

(ب)  $\therefore$  المنحنى يقع أعلى محور ( $\text{ح}$ ) "  $\text{ع} > 0$  " فى كل من :

$[0, 1]$  ،  $[7, 8]$

$\therefore$  الجسيم يتحرك للأمام فى كل من  $[0, 1]$  ،  $[7, 8]$

$\therefore$  المنحنى يقع أسفل محور ( $\text{ح}$ ) "  $\text{ع} < 0$  " فى  $[1, 7]$

$\therefore$  الجسيم يتحرك للخلف فى  $[1, 7]$

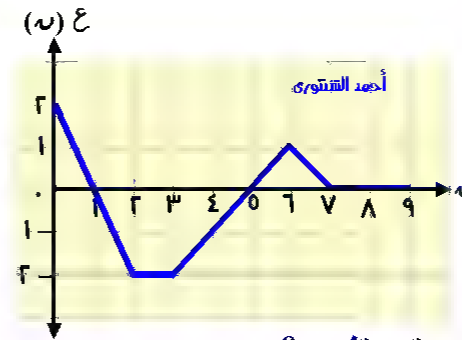
$\therefore$  المنحنى يقع أعلى محور ( $\text{ح}$ ) و ميله موجب "  $\text{ح} < 0$  " فى  $[0, 1]$

، يقع أسفل محور ( $\text{ح}$ ) و ميله سالب "  $\text{ح} > 0$  " فى  $[7, 8]$

$\therefore$  سرعة الجسيم تتزايد فى كل من  $[0, 1]$  ،  $[7, 8]$

$\therefore$  المنحنى يقع أعلى محور ( $\text{ح}$ ) و ميله سالب فى كل من  $[0, 1]$  ،

$[7, 8]$  ، يقع أسفل محور ( $\text{ح}$ ) و ميله موجب فى  $[1, 7]$



أحمد الشنتوي

أحمد الشنتوي



## حل تمارين ( ١ - ١ ) صفحة ١٣٥ بالكتاب المدرسى

تخير الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

- (١) عندما يتحرك جسيم فى خط مستقيم بسرعة ثابتة فإن : عجلته ....  
 (٢) يزداد (ب) يتناقص (د) ثابت لا يساوى الصفر (٤) صفر  
 التغير فى متجه موضع جسيم يتحرك فى خط مستقيم يعرف بأنه : ....  
 (٢) الازاحة (ب) المسافة (د) متجه السرعة (٤) متجه العجلة  
 (٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كانت :  $ع = ٣ هـ^{٢+٣}$  فإن :  
 سرعته الابتدائية تساوى ....

- (٢) ٣ (ب) هـ (د) ٣ هـ (٤) هـ  
 (٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم و معادلة حركته :  $س = طاه$   
 فإن : عجلة الحركة د تساوى ....  
 (٢) قاه (ب) ٢ قاه (د) ٢ ع س (٤) ع س  
 (٥) جسيم يتحرك فى خط مستقيم و كانت معادلة حركته :

- $س = ٢ + ١٠ (١ + ٢)$  فإن : ....  
 (٢) سرعته و عجلة الحركة تتناقصان دائماً  
 (ب) سرعته و عجلة الحركة تتزايدان دائماً  
 (د) السرعة تتناقص و عجلة الحركة تزداد  
 (٤) السرعة تتزايد و عجلة الحركة تتناقص

الحلـ

- (١) بفرض أن :  $ع = ٣$  حيث :  $٣ = ط$  ثابت  $\therefore د = \frac{ع}{٣} = صفر$   
 (٢) الازاحة  
 (٣)  $\therefore ع = ٣ هـ^{٢+٣}$  ، بوضع :  $٣ = ١٠$   $\therefore ع = ٣ هـ$

## اجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٣٥

يتحرك جسيم فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع فى علاقة مع القياس الجبرى لمتجه موضعه س معطاة بالصورة :  
 $ع = \frac{١}{٨ (٤ - س)}$  أوجد د بدلالة س حيث د القياس الجبرى

لعجلة الحركة ثم أوجد أصغر سرعة للجسيم المتحرك

الحلـ

$$\therefore ع = \frac{١}{٨ (٤ - س)} \quad \text{حيث : } س \in ] ٢, ٤ [$$

$$\therefore ع = \frac{١}{٨ (٤ - س)} \quad \text{بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :}$$

$$\frac{ع}{س} \times ٢ = \frac{١}{٨ (٤ - س)} \times ٢ - \frac{١}{٨ (٤ - س)^2} \times ٢$$

$$\therefore ع = \frac{ع}{س} \times ٢ = \frac{١}{٨ (٤ - س)^2} \times ٢ \quad \therefore د = \frac{١}{٨ (٤ - س)^2}$$

،  $\therefore د = ٠$  عندما :  $س = ٤$  ، بدراسة اشارة د كما بالشكل التالى نجد :

س	٢ -	.	٢
إشارة د	- -	.	+ +
ع	تناقصية	قيمة صغرى محلية	تزايدية

عندما :  $س < ٤$ فإن :  $د < ٠$ عندما :  $س > ٤$ فإن :  $د > ٠$ 

$\therefore$  توجد قيمة صغرى للسرعة ع

" أصغر سرعة " عند :  $س = ٤$

$$\therefore \text{عند : } س = ٤ \quad \text{فإن : } ع = \frac{١}{٣٢}$$

$$\therefore \text{أصغر سرعة للجسيم المتحرك} = \frac{١}{٣٢} \pm \frac{١}{٨} \text{ وحدة سرعة}$$

## الحل

في شكل ٢ :

∴ المنحنى محدب لأعلى

∴  $h > 0$

∴ ع تتناقص

أى أن : مقدار سرعة الجسم تتناقص

في شكل ب :

∴ المنحنى يمثل دالة ثابتة

∴ الميل = 0

∴ ع = 0

∴ الجسم متوقف

في شكل ج :

∴ المنحنى يمثل دالة خطية

∴ منحنى ع دالة ثابتة

∴ المنحنى متناقص

∴ الميل > 0

∴ ع > 0

∴ الجسم يرجع للخلف

في شكل د :

∴ المنحنى يمثل دالة خطية

∴ منحنى ع دالة ثابتة

∴ المنحنى متزايد

∴ الميل < 0

∴ ع < 0

∴ الجسم يتحرك للأمام بسرعة ثابتة

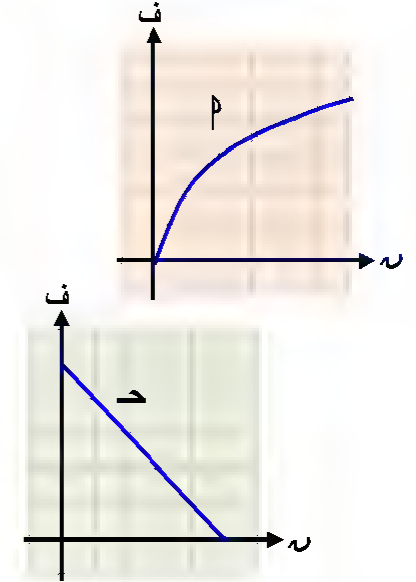
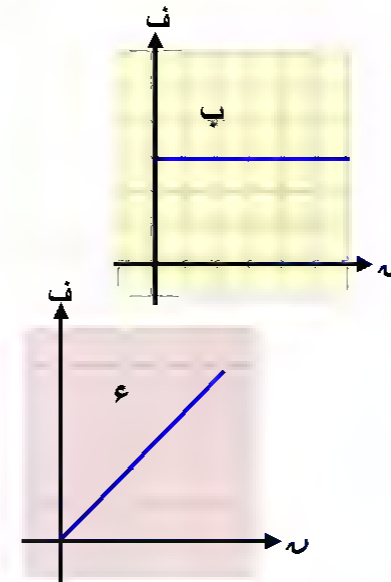
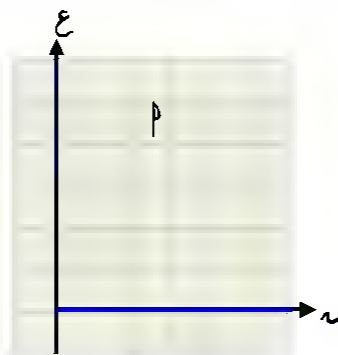
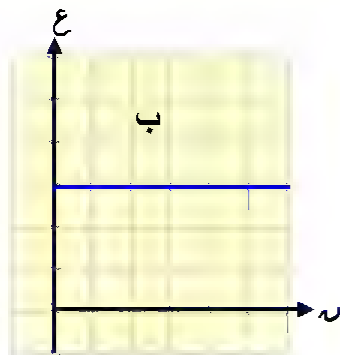
(٧) تخير الرسم البياني أمام كل جملة من الجمل الآتية :

(١) حركة الجسم تقصيرية

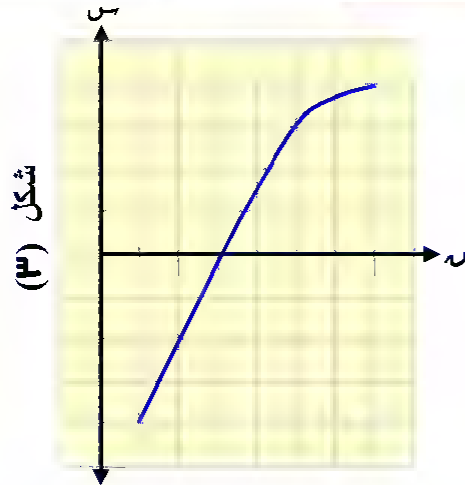
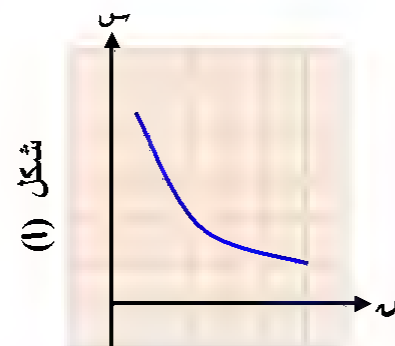
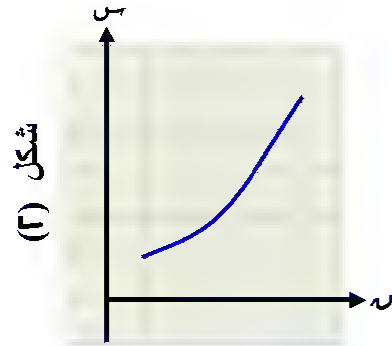
(٢) الجسم يتحرك بسرعة ثابتة

(٣) الجسم متوقف

(٤) حركة الجسم متسارعة

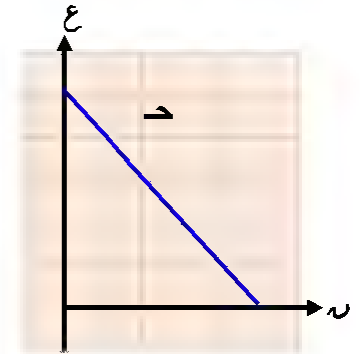
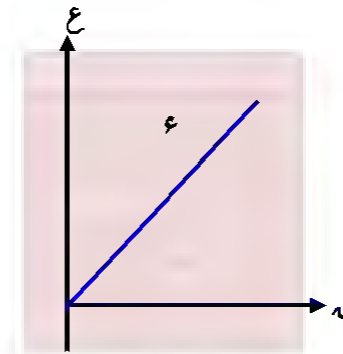


(٨) فى كل من المنحنيات المرسومة ( منحنى الموضع - الزمن ) حدد إشارة القياس الجبرى لمتجه السرعة ، ثم عين ما إذا كان الجسم يتحرك بتسارع أو يتباطأ ( يتحرك ببطء )



الحل

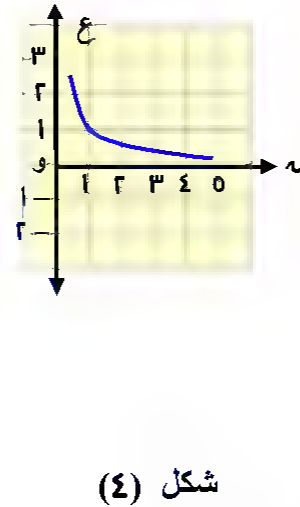
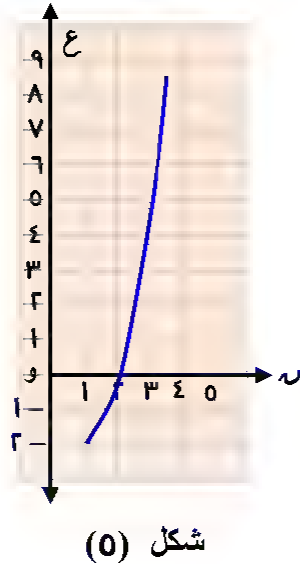
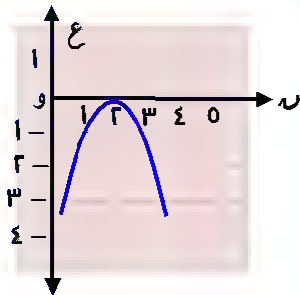
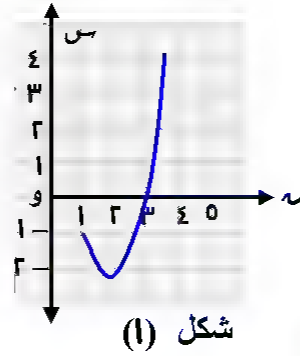
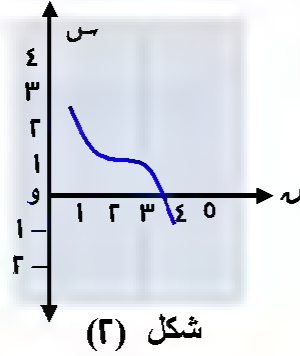
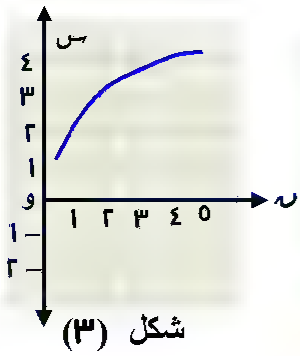
- فى شكل (١) :
- ∴ المنحنى متناقص
  - ∴ الميل سالب ∴  $a > 0$
  - ∴ الجسم يتباطأ ( يتحرك ببطء )
- فى شكل (٢) :
- ∴ المنحنى متناقص
  - ∴ الميل سالب ∴  $a < 0$
  - ∴ الجسم يتباطأ ( يتحرك ببطء )
- فى شكل (٣) :
- ∴ المنحنى متزايد
  - ∴ الميل موجب ∴  $a < 0$
  - ∴ حركة الجسم متسارعة



الحل

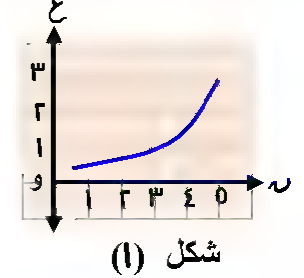
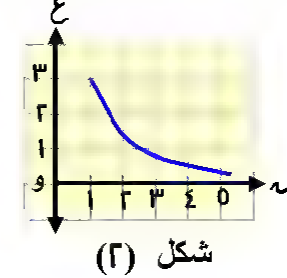
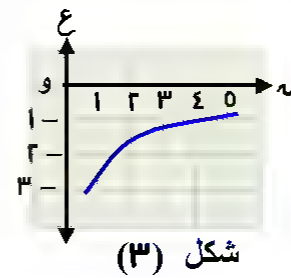
- فى شكل ٤ :
- ∴ المنحنى يقع على محور  $t$  ∴  $a = 0$
  - ∴ الجسم متوقف
- فى شكل ٥ :
- ∴ المنحنى يقع أعلى محور  $t$  ∴  $a < 0$
  - ∴ دالة المنحنى ثابتة ∴ الميل = 0 ∴  $a = 0$
  - ∴ الجسم يتحرك بسرعة ثابتة
- فى شكل ٥ :
- ∴ المنحنى يقع أعلى محور  $t$  ∴  $a < 0$
  - ∴ المنحنى متناقص ∴ الميل سالب ∴  $a > 0$
  - ∴ حركة الجسم تقصيرية
- فى شكل ٥ :
- ∴ المنحنى يقع أعلى محور  $t$  ∴  $a < 0$
  - ∴ المنحنى متزايد ∴ الميل موجب ∴  $a < 0$
  - ∴ حركة الجسم متسارعة

(١٠) أمامك ثلاثة منحنيات (١) ، (٢) ، (٣) كل منها تمثل منحنى الموضع - الزمن ، و ثلاثة منحنيات (٤) ، (٥) ، (٦) كل منها تمثل منحنى السرعة - الزمن ، صل كل منحنى من المجموعة الأولى بالمنحنى المناظر له من المجموعة الثانية



فى شكل (٢) :  $\therefore$  المنحنى متزايد  $\therefore$  الميل موجب  $\therefore$  ع < .  
 $\therefore$  المنحنى محدب لأسفل  $\therefore$  د < .  
 $\therefore$  ع > د .  
 فى شكل (٣) :  $\therefore$  المنحنى متزايد  $\therefore$  الميل موجب  $\therefore$  ع < .  
 $\therefore$  المنحنى محدب لأعلى  $\therefore$  د > .  
 $\therefore$  ع > د .  
 $\therefore$  الجسم يتباطأ ( يتحرك ببطء )

(٩) فى كل من المنحنيات المرسومة ( منحنى السرعة - الزمن ) حدد إشارة العجلة ، و إذا كان الجسم يتحرك بتسارع أو يتحرك بتباطؤ



الحل

فى شكل (١) :  $\therefore$  المنحنى أعلى محور ن  $\therefore$  ع < .  
 $\therefore$  المنحنى متزايد  $\therefore$  الميل موجب  $\therefore$  د < .  
 $\therefore$  ع < د .  
 فى شكل (٢) :  $\therefore$  المنحنى أعلى محور ن  $\therefore$  ع < .  
 $\therefore$  المنحنى متناقص  $\therefore$  الميل سالب  $\therefore$  د > .  
 $\therefore$  ع > د .  
 فى شكل (٣) :  $\therefore$  المنحنى أسفل محور ن  $\therefore$  ع > .  
 $\therefore$  المنحنى متناقص  $\therefore$  الميل موجب  $\therefore$  د < .  
 $\therefore$  ع > د .  
 $\therefore$  الجسم يتحرك بتباطؤ





$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{9}{\pi} \text{ حاس}$   $\therefore \text{ح} = \frac{9}{\pi} \text{ حاس}$  (٢)  
 ، عندما :  $\text{ح} = .$  فإن :  $\text{حاس} = .$   
 $\therefore \text{س} = .$  أى :  $\pi^2$  ، ..... أى :  $\pi^2 -$  ، ..... أى :  $\pi^2 -$  ، .....  
 $\therefore \text{س} = \pi$  ، ..... أى :  $\pi^3$  ، ..... أى :  $\pi -$  ، ..... أى :  $\pi^3 -$  ، .....  
 و بدراسة اشارة ح بالشكل التالى نجد :

س	..	$\pi^2 -$	$\pi -$	.	$\pi$	$\pi^2$	..
إشارة ح		+	-	+	-	.	
ع		تزايدية	تناقصية	تزايدية	تناقصية		
		قيمة عظمى محلية	قيمة عظمى محلية				

أقصى سرعة للجسيم تكون عندما :  
 $\text{س} = \pi$  ، ..... أى :  $\pi^3$  ، ..... أى :  $\pi -$  ، ..... أى :  $\pi^3 -$  ، .....  
 ، عند :  $\text{س} = \pi$  " مثلاً " بالتعويض فى (١) ينتج :  
 $\text{ع}^2 = 16 - 9 = 7$   $\therefore \text{ع} = \pm \sqrt{7}$   
 $\therefore$  أقصى سرعة للجسيم  $0 \pm =$

، بالتعويض فى (٢) ينتج :  $\text{ح} = \frac{9}{\pi} \text{ حاس}$  ،  
 " أى تنعدم العجلة عندما يصل إلى أقصى سرعة ( سرعة منتظمة ) "

لاحظ من الشكل :  
 أصغر سرعة للجسيم تكون عندما :  
 $\text{س} = .$  أى :  $\pi^2$  ، ..... أى :  $\pi^2 -$  ، ..... أى :  $\pi^2 -$  ، .....  
 ، عند :  $\text{س} = .$  " مثلاً " بالتعويض فى (١) ينتج :  
 $\text{ع}^2 = 16 - 9 = 7$   $\therefore \text{ع} = \pm \sqrt{7}$

**(١٣) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة :  $\frac{1}{\text{س}} = \text{ع}$  ، أوجد ح بدلالة س ، ثم أوجد ح عندما :  $\text{س} = \frac{1}{\pi}$**

الحل

$\therefore \text{ع} = \frac{1}{\text{س}} = \text{س}^2$  ،  $\therefore \text{ح} = \text{ع} \cdot \frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{س}}$   
 $\therefore \text{ح} = \frac{\text{ع}^2}{\text{س}} = \frac{\text{س}^4}{\text{س}} = \text{س}^3$   $\therefore \text{ح} = \text{س}^3$  ،  $\therefore \text{س} = \frac{1}{\pi}$  ،  $\therefore \text{ح} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^3 = \frac{1}{\pi^3}$   
 و عندما :  $\text{س} = \frac{1}{\pi}$  فإن :  $\text{ح} = \frac{1}{\pi^3}$  وحدة عجلة  
**حل آخر**

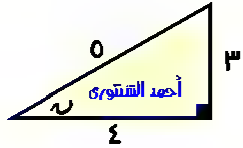
$\therefore \text{ع} = \text{س}^2$  ، بالاشتقاق بالنسبة إلى الزمن نـ ينتج :  
 $\frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{س}^3} = \frac{\text{ع}}{\text{س}^2}$  ،  $\therefore \text{ح} = \frac{\text{ع}}{\text{س}} = \frac{\text{ع}^2}{\text{س}^3}$  ،  $\therefore \text{ح} = \frac{\text{ع}^2}{\text{س}^3}$   
 $\therefore \text{ح} = \frac{\text{ع}^2}{\text{س}^3} = \frac{\text{س}^4}{\text{س}^3} = \text{س}$  ،  $\therefore \text{ح} = \text{س}$  ،  $\therefore \text{س} = \frac{1}{\pi}$  ،  $\therefore \text{ح} = \frac{1}{\pi}$   
 و عندما :  $\text{س} = \frac{1}{\pi}$  فإن :  $\text{ح} = \frac{1}{\pi}$  وحدة عجلة

**(١٤) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث كان القياس الجبرى لمتجه سرعته ع يعطى فى علاقة مع القياس الجبرى للموضع س يعطى بالصورة :  $\text{ع}^2 = 16 - 9 \text{ حاس}$  ، أوجد أقصى سرعة للجسيم و عجلة الحركة عندئذ**

الحل

$\therefore \text{ع}^2 = 16 - 9 \text{ حاس}$  (١) بالاشتقاق بالنسبة إلى س ينتج :  
 $2\text{ع} \cdot \frac{\text{ع}}{\text{س}} = -9 \text{ حاس}$

بالمقسمة ÷ حثانه ينتج :



∴ ٤ حثانه = ٣ حانه

$$\frac{4}{3} = \text{طانه}$$

∴ نه تقع فى الربع الأول أو الربع الثالث

$$\frac{4}{3} = \text{حانه} , \quad \frac{3}{4} = \text{حثانه}$$

$$, \quad \therefore \text{ح} > \frac{\text{ع}^{\text{ف}}}{\text{ع}^{\text{ر}}} > \text{س} \text{ سالبة "}$$

∴ عند : حانه =  $\frac{4}{3}$  ، حثانه =  $\frac{3}{4}$  تكون ف أكبر ما يمكن

$$؛ \text{حانه} - = \frac{4}{3} , \quad \text{حثانه} - = \frac{3}{4}$$

$$, \quad \therefore \text{ح} < \frac{\text{ع}^{\text{ف}}}{\text{ع}^{\text{ر}}} < \text{س} \text{ موجبة "}$$

∴ عند : حانه =  $\frac{4}{3}$  ، حثانه =  $\frac{3}{4}$  تكون ف أقل ما يمكن

∴ أقصى ازاحة هى :

$$\text{ف} = 3 \times \frac{3}{4} + 2 \times \frac{4}{3} = 3 - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{17}{6} + \frac{8}{3} = 3 - \frac{4}{3} = 2 \text{ وحدة ازاحة}$$

(17) جسيم يتحرك فى خط مستقيم تبعاً للعلاقة : س = ١ حانه

حيث : س يعبر عن القياس الجبرى للموضع ، نه الزمن ،

١ حانه ، ل ∩ ح أوجد :

(١) العلاقة بين : ع ، س حيث : ع القياس الجبرى لمتجه السرعة

(ب) ع عندما : س =  $\frac{1}{4}$

(ح) الزمن المستغرق حتى يكون : س =  $\frac{1}{4}$

ثم أوجد عجلة الحركة عندئذ

(10) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بحيث تكون معادلة حركته تعطى

بالصورة : س (ن) = ٣ حثانه + ٤ حانه حيث : س

مقاسة بالمتري ، نه مقاسة بالثانية أوجد :

(١) القياس الجبرى للازاحة ف عندما :  $\pi \frac{1}{4} = \text{ن}$  ،  $\pi = \text{ن}$

(ب) القياس الجبرى لمتجه السرعة ع

عندما :  $\text{ن} = 0$  ،  $\pi \frac{1}{4} = \text{ن}$  ،  $\pi = \text{ن}$

(ح) أقصى ازاحة للجسيم

الحل

$$\therefore \text{ف} = \text{س} (ن) - \text{س} (0)$$

$$\text{س} (0) = 3 \text{ حثانه} + 4 \text{ حانه} = 3 = 0 \times 4 + 1 \times 3$$

$$\therefore \text{ف} = 3 \text{ حثانه} + 4 \text{ حانه} - 3$$

$$(١) \therefore \text{ف} = 3 \text{ حثانه} + 4 \text{ حانه} - 3$$

$$\therefore \text{عندما : } \pi \frac{1}{4} = \text{ن} \text{ فإن : ف} = 3 - 1 \times 4 + 0 \times 3 = 1$$

$$\text{عندما : } \pi = \text{ن} \text{ فإن : ف} = 3 - 0 \times 4 + (1 -) \times 3 = 1 -$$

$$(ب) \text{ع} = \frac{\text{ع}^{\text{ف}}}{\text{ع}^{\text{ر}}} = 3 - 4 \text{ حثانه} + 4 \text{ حانه}$$

$$\therefore \text{عندما : } \text{ن} = 0 \text{ فإن : ع} = 1 \times 4 + 0 \times 3 - = 4$$

$$\text{عندما : } \pi \frac{1}{4} = \text{ن} \text{ فإن : ع} = 3 - 0 \times 4 + 1 \times 3 - = 3 -$$

$$\text{عندما : } \pi = \text{ن} \text{ فإن : ع} = 3 - 0 \times 4 + (1 -) \times 4 - = 4 -$$

$$(ح) \therefore \text{ف} = 3 \text{ حثانه} + 4 \text{ حانه} - 3$$

$$\therefore \text{ع} = \frac{\text{ع}^{\text{ف}}}{\text{ع}^{\text{ر}}} = 3 - 4 \text{ حثانه} + 4 \text{ حانه}$$

$$\text{ح} = \frac{\text{ع}^{\text{ع}}}{\text{ع}^{\text{ر}}} = \frac{\text{ع}^{\text{ف}}}{\text{ع}^{\text{ر}}} = 3 - 4 \text{ حثانه} - 4 \text{ حانه}$$

$$\text{و عندما : ع} = 0 \text{ فإن : } 0 = 3 \text{ حثانه} + 4 \text{ حانه} -$$

## الحل

$$(٢) \because س = پ \text{ حال } ن \quad \therefore \text{ حال } ن = \frac{س}{پ}$$

$$ع = \frac{عس}{ن} = پ \text{ حال } ن$$

$$\therefore ع = پ = پ \text{ حال } ن \text{ حقا } ن = ن \times پ \text{ حقا } ن$$

$$= (پ - پ \text{ حال } ن)$$

$$= (س - پ)$$

$$\therefore ع = \pm \sqrt{\frac{س - پ}{س}}$$

(ب) عندما : س =  $\frac{1}{4}$  پ فإن :

$$ع = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = 0 \text{ ومنها : } ع = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

(د) عندما : س =  $\frac{1}{4}$  - فإن :  $پ = \frac{1}{4}$  حال ن

$\therefore$  حال ن =  $\frac{1}{4}$  - " سالبة "

$$\therefore \text{ حال } ن = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ حال } ن \text{ أو } \text{ حال } ن = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ حال } ن \text{ حيث : } ن \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \text{ حال } ن = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ حال } ن \text{ أو } \text{ حال } ن = \frac{\pi}{4} + \pi \text{ حال } ن$$

$$د = \frac{ع}{ن} = \frac{ع}{س} = \frac{ع}{پ} \text{ حال } ن \text{ عندما : س = } \frac{1}{4} - \text{ فإن :}$$

$$\text{ حال } ن = \frac{1}{4} - \therefore د = (\frac{1}{4} -) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

## ٢ - ١ تكامل الدوال المتجهة

[١] التكامل المحدد :

نلاحظ أن :

(١) من تعريف التكامل غير المحدد :

$$ص = \int د(س) = عس + ث$$

حيث : ث ثابت اختياري لا يتوقف على س ، و وجوده ضروري

ليشتمل التكامل على جميع الدوال التي معدل تغيرها هو د(س)

و على ذلك فإن : التكامل غير المحدد لا ينتج قيمة معينة للمتغير س

(٢) إذا كانت قيمة التكامل عند : س = پ هي : د(پ) + ث

و قيمته عند : س = ب هي : د(ب) + ث

$\therefore$  الفرق بين قيمتي التكامل عند : س = پ ، س = ب

$$= د(ب) - د(پ)$$

و هو قيمة معينة ( مهما كانت قيمة المقدار الثابت ث )

و يرمز له بالرمز  $\int_p^b د(س) = عس$  حيث :

$$\int_p^b د(س) = عس = د(ب) - د(پ)$$

حيث : پ ، ب هما حدى التكامل

مثال :  $\int_1^4 (٣س^٢ - ٤س + ٢) دس =$

$$= \int_1^4 [٣س^٢ + \frac{1}{4}س - ٤س + ٢] دس =$$

$$= \int_1^4 [٣س^٢ + \frac{1}{4}س - ٢س + ٢] دس =$$

$$= [٨ + ٣٢ - ٦٤ - ١] - [٢ + ٢ - ١] =$$

$$= ٣٩$$



## ملاحظة :

إذا كانت د دالة متصلة على  $[p, b]$  ، د(س)  $\leq$  . فى هذه الفترة ، م هى مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة د و محور السينات و المستقيمين  $s = p$  ،  $s = b$  فإن :

$$M = \int_p^b d(s) ds$$

سيدرس التكامل المحدد و المساحات تحت المنحنى بالوحدة الرابعة " التكامل المحدد و تطبيقاته " بمقرر التفاضل و التكامل "

## [٢] استنتاج السرعة و الاذاحة :

$$(1) \text{ إذا كانت : } d = \frac{dx}{dt} \text{ فإن : } \int dx = \int v dt \quad (1-1)$$

و لتعيين عجلة حركة وحيدة تطابق العجلة المعطاة د(ص) يجب وضع الشروط الابتدائية لكل من السرعة الابتدائية ع. ، و الموضع الابتدائي س. و ذلك عند :  $v = 0$  ، و يمكن استبدال التكامل المحدد مع حدود التكامل المناسبة فيكون :

$$\int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v dt$$

$$\therefore x - x_0 = \int_{t_0}^t v dt \quad (2-1)$$

= المساحة تحت منحنى العجلة - الزمن

و إذا كانت : العجلة د ثابتة فإن :  $x - x_0 = \int_{t_0}^t v dt$

$$\therefore x - x_0 = v t \quad \text{و منها :}$$

$$x = x_0 + v t \quad (3-1)$$

وهى المعادلة الأولى من معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

## ملاحظة :

لا يمكن استخدام المعادلة (١ - ٣) إلا فى حالة العجلة الثابتة أما إذا كانت العجلة دالة فى الزمن نستخدم المعادلة (١ - ١) أو (١ - ٢) حسب معطيات المسألة

$$(2) \text{ إذا كانت : } v = \frac{dx}{dt} \text{ فإن : } \int dx = \int v dt$$

$$\therefore s = \int v dt$$

و باستخدام التكامل المحدد و حدود التكامل المناسبة نجد أن :

$$\int_{s_0}^s ds = \int_{t_0}^t v dt$$

$$\therefore s - s_0 = \int_{t_0}^t v dt$$

= المساحة تحت منحنى السرعة - الزمن

لاحظ :  $s - s_0 = \Delta s = \Delta x$

و إذا كانت العجلة ثابتة يمكن التعويض عن السرعة من المعادلة (١ - ٣) فيكون :

$$s - s_0 = \int_{t_0}^t v dt = \int_{t_0}^t (at + v_0) dt$$

$$= at^2/2 + v_0 t \quad \text{و منها :}$$

$$s = s_0 + v_0 t + at^2/2$$

$$\therefore s - s_0 = \Delta s = v_0 t + at^2/2$$

$$\therefore \Delta s = v_0 t + at^2/2$$

وهى المعادلة الثانية من معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

لكل مضلع

$$(2) \text{ المسافة المقطوعة } = \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$$

$$= \int_p^q |v| dt + \int_q^r |v| dt = \int_p^r |v| dt$$

$$= \int_p^q |v| dt + \int_q^r |v| dt = \int_p^r |v| dt$$

إجابة حاول أن تحل (1) صفحة ١٤١

جسيم يتحرك فى خط مستقيم مبتدأ من السكون و على بعد ٨ أمتار من نقطة ثابتة على الخط المستقيم فإذا كانت  $v = 4 - t^2$  حيث  $t$  مقاسة بوحدة م/ث فأوجد العلاقة بين السرعة و الزمن كذلك العلاقة بين الإزاحة و الزمن

الحل

$$v = 4 - t^2 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -2t \Rightarrow \int dv = \int -2t dt \Rightarrow v = -t^2 + C$$

$$v = 4 - t^2 \Rightarrow \int v dt = \int (4 - t^2) dt \Rightarrow s = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$v = 4 - t^2 \Rightarrow \int v dt = \int (4 - t^2) dt \Rightarrow s = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$v = 4 - t^2 \Rightarrow \int v dt = \int (4 - t^2) dt \Rightarrow s = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$v = 4 - t^2 \Rightarrow \int v dt = \int (4 - t^2) dt \Rightarrow s = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$v = 4 - t^2 \Rightarrow \int v dt = \int (4 - t^2) dt \Rightarrow s = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

إجابة حاول أن تحل (2) صفحة ١٤٢

بدأت سيارة الحركة من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على الخط و يعطى القياس الجبرى لمتجه سرعتها بعد زمن  $t$  بالعلاقة :

(3) إذا كانت :  $v = 4 - t^2$  فإن :  $\int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$  و باستخدام التكامل المحدد و حدود التكامل المناسبة نجد أن :

$$\int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$$

$$\int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$$

المساحة تحت منحنى العجلة - الإزاحة

و إذا كانت العجلة ثابتة فإن :

$$\int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$$

$$\int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$$

لاحظ :  $s = s - s = 0$   $\therefore \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$ 

وهى المعادلة الثالثة من معادلات الحركة منتظمة التغير فى خط مستقيم

ملاحظات :

الشكل المقابل يمثل :

( منحنى السرعة - الزمن ) لحركة جسيم خلال الفترة الزمنية  $[p, q]$  فيكون :

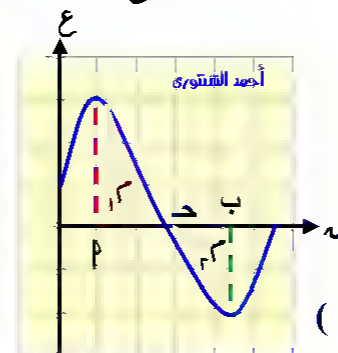
$$(1) \text{ الإزاحة } f = \int_p^q v dt = \int_p^q v dt$$

$$= \text{المساحة } (M_1) - \text{المساحة } (M_2)$$

$$= \int_p^q |v| dt - \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$$

$$= \int_p^q |v| dt - \int_p^q |v| dt = \int_p^q |v| dt$$

و إذا كانت : المساحتين  $M_1$  ،  $M_2$  لمضلعين هندسيين ( مثلث أو مستطيل أو شبه منحرف ... ) يمكن إيجاد كل منها بقانون المساحة



ع =  $\nu_3 + \nu_2$  حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ،  $\nu$  مقاسة بالثانية  
أوجد كلاً من عجلة الحركة و ازاحة السيارة عند  $\nu = 2$

الحل

$$\nu_2 + \nu_3 = \frac{ع}{\nu} = ح \therefore \nu_2 + \nu_3 = ع$$

$$\text{عند } \nu = 2 \quad 2 + \nu_3 = ح \quad 14 = 2 + \nu_3 \quad \nu_3 = 12$$

$$ف = \left[ \nu^2 ع \right] = \nu^2 (2) \therefore ف = 2 (2 + 12) = 32$$

$$\therefore ف = 2 (2 + 12) = 32 \quad 2 \cdot 12 = 24 \quad 24 + 8 = 32$$

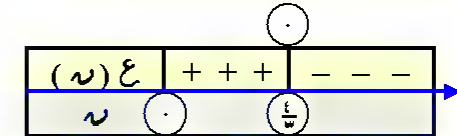
إجابة حاول أن تحل (٣) صفحة ١٤٣

بدأت سيارة الحركة من السكون فى خط مستقيم من نقطة ثابتة على هذا الخط و يعطى القياس الجبرى لمتجه السرعة ع بعد زمن  $\nu$  بالعلاقة :  
 $ع = \nu_3 - \nu_2$  حيث ع مقاسة بوحدة م/ث ،  $\nu$  مقاسة بالثانية  
أوجد خلال الفترة الزمنية  $\nu$  حيث  $\nu \in [2, 8]$  كلاً من السرعة المتوسطة و متجه السرعة المتوسطة ،  
متى تصل سرعة السيارة إلى قيمتها العظمى ؟  
و أوجد مقدار العجلة عندئذ

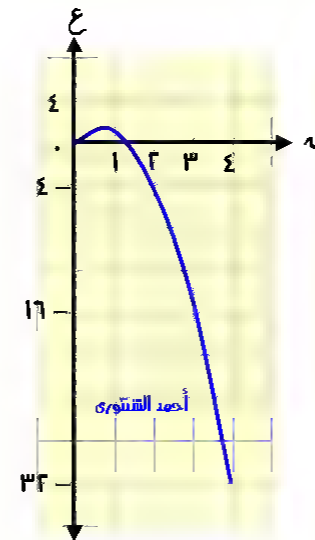
الحل

$$\nu_3 - \nu_2 = ع \therefore ع = (\nu_3 - \nu_2) \quad \nu = 2$$

، يبحث اشارة ع كما بالشكل التالى :



أو منحنى السرعة - الزمن

نجد : السيارة تغير حركتها بعد  $\frac{ع}{\nu}$  ث

∴ المسافة المقطوعة خلال  $[2, 8]$  :  $\left[ \nu^2 ع \right] + \left[ \nu^2 ع \right] =$

$$= \left[ \frac{\nu^3}{3} ع \right] + \left[ \frac{\nu^3}{3} ع \right] =$$

$$= \left[ \frac{928}{3} - \frac{32}{3} - 32 - 0 \right] = \frac{928}{3} - \frac{32}{3} = 300$$

$$\therefore \text{السرعة المتوسطة خلال } [2, 8] = 2 \div \frac{928}{3} = \frac{3}{2} \text{ م/ث}$$

$$\nu_3 - \nu_2 = ع \therefore \nu_3 - \nu_2 = ف \therefore \left[ \nu^2 (3 - 2) \right] = \nu^2 ع = ف$$

$$= 32 - 0 = 32 \quad \left[ \nu^2 ع \right] = 32 - 0 = 32$$

$$\therefore \text{متجه السرعة المتوسطة خلال } [2, 8] = \frac{32}{8} = 4 \text{ م/ث}$$

حيث  $\frac{ع}{\nu}$  متجه وحدة فى اتجاه الحركة، يكون القياس الجبرى لمتجه السرعة المتوسطة =  $\frac{ع}{\nu} = 4$  م/ثتصل السرعة لقيمتها العظمى أو الصغرى عندما :  $ح = 0$ 

$$\text{أى عندما : } \frac{ع}{\nu} = 0 \quad \text{أى عندما : } 3 - 2 = 0 \quad \text{أى عند : } \nu = 3 \text{ ث}$$

$$\therefore \text{عندما : } \nu < 3$$

$$\text{فإن : } ح > 0$$

$$\text{عندما : } \nu > 3$$

$$\text{فإن : } ح < 0$$

∴ توجد قيمة عظمى للسرعة ع

$$\text{عند : } \nu = 3 \text{ ث}$$

لاحظ الشكل المقابل :

أو منحنى السرعة - الزمن

" السابق تمثيله "

$$\text{أى تصل السرعة لقيمتها العظمى عند : } \nu = 3 \text{ ث و عندها : } ح = 0$$

$\nu$	0	$\frac{ع}{\nu}$	$\infty$
إشارة ح	++	.	--
ع	تناقصية	قيمة عظمى محلية	تزايدية

## إجابة حاول أن تحل (٤) صفحة ١٤٣

سيارة تتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية ١٢ م/ث من موضع يبعد ٤ أمتار فى الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت  $د = س - ٤$  أوجد :

(١) ع بدلالة س (ب) سرعة السيارة عندما  $د = ٠$  الحل

$$(١) \because د = ع \frac{ع}{س} \therefore [د س = ع^2] \therefore [٤ س = ع^2]$$

$$\therefore [٤ (س - ٤) = ع^2] \therefore [٤ س - ١٦ = ع^2]$$

$$\therefore [٤ س - ١٦ = ع^2] \therefore [٤ س - ١٦ = ع^2]$$

$$\therefore (٤ س - ١٦) - (٨ - ١٦) = ع^2 - ٧٢$$

$$\therefore ٤ س - ٨ = ع^2 \text{ بالضرب } \times ٢ \text{ ينتج :}$$

$$٨ س - ١٦ = ع^2$$

$$(ب) \because د = ٠ \text{ عندما : } س = ٤ \text{ أى : } س = ٤$$

$$\therefore \text{عند } س = ٤ : ع = ١٤٤ \therefore ع = ١٢ \text{ م/ث}$$

## إجابة حاول أن تحل (٥) صفحة ١٤٤

جسيم يتحرك بسرعة ابتدائية مقدارها ٢ م/ث من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كانت  $د = هـ$  أوجد ع بدلالة س ثم أوجد ع عندما  $س = ٤$  متر ، س عندما  $ع = ٢٠$  م/ث الحل

$$\because د = ع \frac{ع}{س} \therefore [د س = ع^2] \therefore [٢ س = ع^2]$$

$$\therefore [٢ س = ع^2] \therefore [٢ س = ع^2]$$

$$\therefore ٢ س - ١٦ = ع^2 - ٧٢$$

$$\therefore ٢ س - ٨ = ع^2 \text{ ومنها : } ع = ٢ + هـ$$

$$\therefore ٢ س = ٤ + هـ^2 \text{ فإن : } ع = ٢ + هـ \sim ١١١,٢$$

$$\text{و عندما : } ع = ٢٠ \text{ م/ث}$$

$$\therefore هـ = ١٩٩$$

$$\text{، عندما : } س = ٤$$

$$\therefore ع \sim \pm ١٠,٥ \text{ م/ث}$$

$$\therefore ٢ + هـ = ٤$$

$$\therefore س = ١٩٩ \sim ٥,٣$$

## حل تمارين ( ١ - ٢ ) صفحة ١٤٤ بالكتاب المدرسى

فى جميع المسائل اعتبر أن الجسم يتحرك فى خط مستقيم ، س ، ع ،  
ح هى القياسات الجبرية لكل من الموضع ، متجه السرعة ، العجلة  
على الترتيب

أختر الاجابة الصحيحة من بين الاجابات المعطاة

(١) إذا كان : ع =  $3s - 2t$  و كانت : س = ١ عندما  
..... فإن : .....

(ب) س =  $2 - t$  (ب) س =  $3 - t$

(ح) س =  $3 - t$  (ع) س =  $1 - t$

(٢) إذا كان : ع =  $1 + ح$  و كانت : س = ٣ عندما  
..... فإن : .....

(ب) س =  $ح + ٢$  (ب) س =  $ح - ٢$

(ح) س =  $٢ - ح$  (ع) س =  $٢ + ح$

(٣) إذا كان : ع =  $3 - t$  فإن : ف خلال [ ٢ ، ٠ ] تساوى ....

(ب) ٢ وحدة طول (ب) ١ وحدة طول

(ع) ٤ وحدة طول (ح) ٣ وحدة طول

(٤) إذا كان : ع =  $3 - t$  فإن :  
المسافة المقطوعة خلال [ ٢ ، ٠ ] تساوى ....

(ب) ٤ وحدة طول (ب)  $\frac{4}{3}$  وحدة طول

(ع)  $\frac{11}{3}$  وحدة طول (ح)  $\frac{11}{3}$  وحدة طول

(٥) إذا كان : ع =  $3s - 2t$  فإن :  
المسافة المقطوعة خلال [ ٣ ، ٠ ] تساوى ....

(ب)  $\frac{1}{4}$  وحدة طول (ب)  $\frac{1}{4}$  وحدة طول

(ح)  $\frac{9}{4}$  وحدة طول (ع)  $\frac{11}{4}$  وحدة طول

(٦) إذا كان : ح = ٣ ، ع =  $1 - t$  فإن :  
ف خلال [ ٢ ، ٠ ] تساوى ....

(ب)  $\frac{1}{4}$  وحدة طول (ب) ٤ وحدة طول

(ح)  $\frac{5}{4}$  وحدة طول (ع)  $\frac{13}{4}$  وحدة طول

(٧) إذا كان : ح = ٣ ، ع =  $1 - t$  فإن :  
المسافة المقطوعة خلال [ ٢ ، ٠ ] تساوى ....

(ب)  $\frac{1}{4}$  وحدة طول (ب) ٤ وحدة طول

(ح)  $\frac{5}{4}$  وحدة طول (ع)  $\frac{13}{4}$  وحدة طول

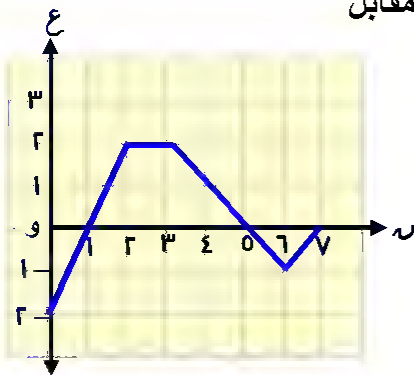
(٨) من منحنى السرعة - الزمن المقابل  
فإن : مقدار الاراحة = ....

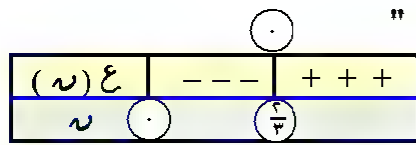
(ب) ٣ وحدة طول

(ب) ٥ وحدة طول

(ح) ٧ وحدة طول

(ع) ٨ وحدة طول





يوضح ذلك بحث إشارة ع (ن) " دالة خطية " بالشكل المقابل :

أو منحنى السرعة - الزمن التالى حيث :

عندما :  $n = 0$  فإن :  $E = -2$  ،

عندما :  $n = 2$  فإن :  $E = 4$

$$\therefore F = F_2 - F_1 = \int_{n=0}^{n=2} E \, dn = \int_{n=0}^{n=2} (-2 + 2n) \, dn$$

$$= \left[ -2n + n^2 \right]_{n=0}^{n=2} = (-4 + 4) - (0) = 0$$

$$= \left[ -2n + n^2 \right]_{n=0}^{n=2} = (-4 + 4) - (0) = 0$$

$$= \left[ -2n + n^2 \right]_{n=0}^{n=2} = (-4 + 4) - (0) = 0$$

$$= \left[ -2n + n^2 \right]_{n=0}^{n=2} = (-4 + 4) - (0) = 0$$

$$= \left( \frac{2}{3} \times 2 - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \right) -$$

$$- \left( 0 - \left( \frac{2}{3} \times 2 - \frac{4}{3} \times \frac{2}{3} \right) \right) = 2 \text{ وحدة طول}$$

**حل ثالث**

من منحنى السرعة - الزمن :

$$F_1 = \text{مساحة مثلث} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

$$F_2 = \text{مساحة مثلث} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore F = F_2 - F_1 = \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3} = 2 \text{ وحدة طول}$$

$$(4) \therefore E = F_2 - F_1 = \int_{n=0}^{n=2} E \, dn = \int_{n=0}^{n=2} (-2 + 2n) \, dn$$

$$\therefore \text{عندما : } E = 0 \text{ فإن : } n = 0 \text{ ، } n = \frac{2}{3} \text{ ث}$$

الجسيم يغير اتجاه حركته عند  $n = \frac{2}{3}$  ث

(٩) من منحنى السرعة - الزمن المقابل

فإن : مقدار الإزاحة = ....

(أ) ٤,٥ وحدة طول

(ب) ١٠,٥ وحدة طول

(ج) ١٣,٥ وحدة طول

(د) ١٩,٥ وحدة طول

**الحل**

$$(1) \therefore E = F_2 - F_1 = \int_{n=0}^{n=2} E \, dn = \int_{n=0}^{n=2} (-2 + 2n) \, dn$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 0 \text{ فإن : } E = -2$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 2 \text{ فإن : } E = 4$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 1 \text{ فإن : } E = 0$$

$$(2) \therefore E = F_2 - F_1 = \int_{n=0}^{n=2} E \, dn = \int_{n=0}^{n=2} (-2 + 2n) \, dn$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 0 \text{ فإن : } E = -2$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 2 \text{ فإن : } E = 4$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 1 \text{ فإن : } E = 0$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 2 \text{ فإن : } E = 4$$

$$(3) \therefore E = F_2 - F_1 = \int_{n=0}^{n=2} E \, dn = \int_{n=0}^{n=2} (-2 + 2n) \, dn$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 0 \text{ فإن : } E = -2$$

$$\therefore \text{عندما : } n = 2 \text{ فإن : } E = 4$$

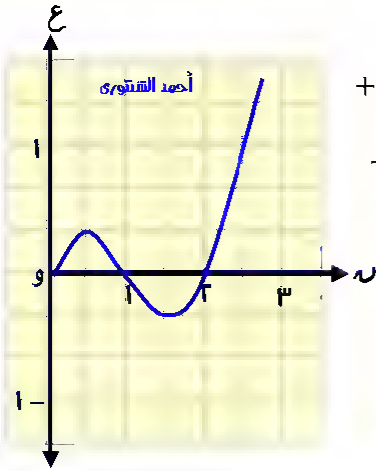
**حل آخر**

$$\therefore \text{عندما : } E = 0 \text{ فإن : } n = 0 \text{ ، } n = \frac{2}{3} \text{ ث}$$

عندما :  $n = \frac{2}{3}$  ث ، و عندها يغير الجسم اتجاه حركته



أو منحنى السرعة - الزمن المقابل :  
∴ المسافة المقطوعة =



$$+ | \nu^6 ( \nu^2 + \nu^3 - \nu^3 ) |_1^1|$$

$$+ | \nu^6 ( \nu^2 + \nu^3 - \nu^3 ) |_1^1|$$

$$| \nu^6 ( \nu^2 + \nu^3 - \nu^3 ) |_1^1|$$

$$+ | [ \nu^2 + \nu^3 - \nu^2 ] | =$$

$$+ | [ \nu^2 + \nu^3 - \nu^2 ] |$$

$$| [ \nu^2 + \nu^3 - \nu^2 ] |$$

$$| (1 + 1 - \frac{1}{4}) - (2 + 8 - 2) | + | 0 - (1 + 1 - \frac{1}{4}) | =$$

$$| (2 + 8 - 2) - (9 + 27 - \frac{1}{4}) | +$$

$$\frac{9}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = | \frac{9}{4} | + | \frac{1}{4} - | + | \frac{1}{4} | =$$

$$\frac{11}{4} = \text{وحدة طول}$$

$$\nu^3 = \text{ثابتة " } \therefore \text{ع} = \text{ع} + \nu^3$$

$$\nu^3 + 1 - = \text{ع} \therefore \text{ع} = 1 -$$

$$\therefore \text{ف} = \nu^6 ( \nu^3 + 1 - ) = [ \nu^2 + \nu^3 - \nu^2 ]$$

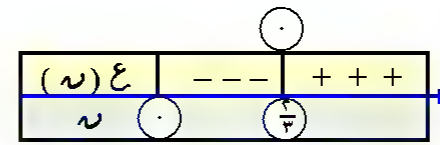
$$= 0 - ( 2 \times \frac{3}{4} + 2 - ) = 2 = \text{وحدة طول}$$

حل آخر

$$\therefore \text{ع} = 1 - \nu^3 \therefore \text{ع} = 0$$

فإن :  $\nu = \frac{1}{4}$  ث ، و عندها يغير الجسيم اتجاه حركته

يوضح ذلك بحث إشارة ع (  $\nu$  ) " دالة خطية "



يوضح ذلك بحث إشارة ع (  $\nu$  )  
دالة تربيعية " بالشكل المقابل :  
أو منحنى السرعة - الزمن التالى  
حيث :

عندما :  $\nu = 0$  فإن : ع = 0

عندما :  $\nu = 2$  فإن : ع = 8

$$3 = \nu^2 - \nu^3 = ( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \nu^2 - \nu^3 )$$

$$\frac{1}{4} - ( \frac{1}{4} - \nu )^3 =$$

∴ نقطة رأس المنحنى هي :  $( \frac{1}{4} , \frac{1}{4} )$

$$\therefore \text{المسافة المقطوعة} = | \nu^6 ( \nu^2 - \nu^3 ) |_1^1|$$

$$+ | \nu^6 ( \nu^2 - \nu^3 ) |_1^1|$$

$$= | [ \nu^2 - \nu^3 ] | + | [ \nu^2 - \nu^3 ] | =$$

$$= | [ ( \frac{4}{9} - \frac{8}{27} ) - ( 2 - 8 ) ] | + | [ 0 - ( \frac{4}{9} - \frac{8}{27} ) ] | =$$

$$= | \frac{11}{27} + \frac{11}{27} + \frac{4}{27} | = | \frac{4}{27} + 2 | + | \frac{4}{27} - | =$$

$$\therefore \text{ع} = \nu^2 + \nu^3 - \nu^3 = \text{ع} \quad (0)$$

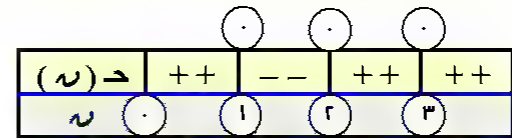
$$\nu = ( \nu^2 + \nu^3 - \nu^3 ) = ( 2 - \nu ) ( 1 - \nu ) \nu$$

∴ عندما : ع = 0 فإن :  $\nu = 0$  ،  $\nu = 1$  ،  $\nu = 2$

الجسيم يغير اتجاه حركته عند  $\nu = 1$  ث

،  $\nu = 2$  ث يوضح ذلك بحث

إشارة ع (  $\nu$  ) " دالة تكعيبية "



(٨) مقدار الازاحة = مساحة شبه منحرف - مساحة مثلث - مساحة مثلث

$$1 \times 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times 1 \times \frac{1}{2} - 2 \times (1 + 2) \times \frac{1}{2} =$$

$$0 = 1 - 1 - 2 = \text{وحدة طول}$$

(٩) المسافة المقطوعة = |مساحة مثلث| + |مساحة شبه منحرف| + |مساحة مثلث|

$$|3 \times 3 \times \frac{1}{2}| + |2 \times (2 + 3) \times \frac{1}{2}| + |3 \times 2 \times \frac{1}{2}| =$$

$$3 + 12 + \frac{9}{2} = \frac{39}{2} = 19.5 \text{ وحدة طول}$$

(١٠) قذف جسيم رأسياً لأعلى بسرعة ابتدائية قدرها 0.6 م/ث من نقطة

على ارتفاع 24.0 م من سطح الأرض ، أوجد كل من ع ، س بدلالة ن ثم أوجد أقصى ارتفاع يصل إليه الجسيم عن سطح الأرض

الحل

∴ الجسيم يتحرك رأسياً لأعلى بعبء ثابتة " فى عكس اتجاه الجاذبية الأرضية "

$$\therefore \text{ع} = 9.8 - 0.6 = 9.2 \text{ م/ث}^2 \text{ ، } \therefore \text{س} - \text{س} = \text{ع} \times \text{ن} \Rightarrow \text{س} = 9.2 \times \text{ن} + 0.6$$

$$\therefore \text{س} - 24.0 = 9.2 \times \text{ن} \Rightarrow \text{س} = 9.2 \times \text{ن} + 24.0$$

$$\therefore \text{س} = 9.2 \times \text{ن} + 24.0 + 0.6 = 9.2 \times \text{ن} + 24.6$$

$$\therefore \text{ع} = 9.2 \text{ م/ث}^2 \text{ ، } \therefore \text{ع} = 9.2 \text{ م/ث}^2$$

$$\text{و منها : } \text{ن} = \frac{0.6}{9.2} = \frac{3}{46} \text{ ث}$$

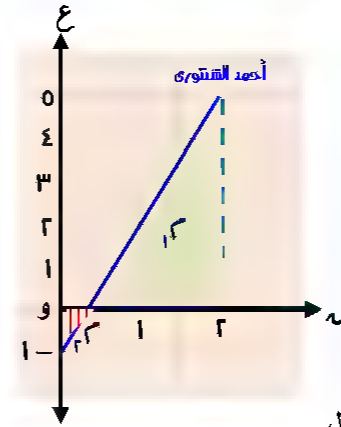
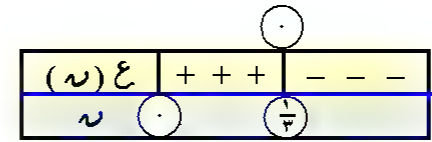
$$\therefore \text{س} = 9.2 \times \frac{3}{46} + 24.6 + 0.6 = 25.1 \text{ م}$$

(١١) جسيم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية 2 م/ث من نقطة ثابتة

بحيث كان : ح = 2 - ن ، ح مقاسة بوحددة م/ث ، أوجد

بدلالة ن كل من ع ، س ثم أوجد س عندما : ع = 18 م/ث

الحل



بالشكل المقابل : أو منحنى السرعة - الزمن التالى حيث :

عندما : ن = 0 ، فإن : ع = 1 ،

عندما : ن = 2 ، فإن : ع = 0

$$\therefore \text{ف} = \text{س}_2 - \text{س}_1 = \int_0^2 (1 - 3\text{ن}) \text{ن} \text{ د} \text{ن}$$

$$= \left[ \text{ن} - \frac{3}{2} \text{ن}^2 \right]_0^2 =$$

$$= \left[ \text{ن} - \frac{3}{2} \text{ن}^2 \right]_0^2 =$$

$$= \left[ \text{ن} - \frac{3}{2} \text{ن}^2 \right]_0^2 =$$

$$= \left[ (2 - 1) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] =$$

$$= \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] = 1 \text{ وحدة طول}$$

حل ثالث

من منحنى السرعة - الزمن :

$$\text{س}_1 = \text{مساحة مثلث} = 0 \times \frac{0}{2} \times \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{س}_2 = \text{مساحة مثلث} = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{ف} = \text{س}_2 - \text{س}_1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} = 0.25 \text{ وحدة طول}$$

(٧) من (٦) يكون :

$$\text{المسافة المقطوعة} = \left| \int_0^2 (1 - 3\text{ن}) \text{ن} \text{ د} \text{ن} \right| + \left| \int_2^4 (1 - 3\text{ن}) \text{ن} \text{ د} \text{ن} \right| =$$

$$= \left| \left[ \text{ن} - \frac{3}{2} \text{ن}^2 \right]_0^2 \right| + \left| \left[ \text{ن} - \frac{3}{2} \text{ن}^2 \right]_2^4 \right| =$$

$$= \left| \left[ 2 - 1 \right] - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right] \right| + \left| \left[ 4 - 6 \right] - \left[ 2 - 1 \right] \right| = \left| 1 \right| + \left| -3 \right| = 4 \text{ وحدة طول}$$

∴ الجسم يتحرك بعجلة :  $د = ١ - ٧٢ = ع$  ،  $ع = ٢٢ / ث$

$$∴ ع - ع = [٧٢(١ - ٧٢)] = ٧٢$$

$$ع - ٢ = ٧٢ - ٧٢ = ع ∴ ٢ + ٧١ - ٧٢ = ع ∴$$

∴ الجسم يتحرك من نقطة ثابتة ∴  $س = [٧٢(٢ + ٧١ - ٧٢)] = ٧٢$

$$∴ س = ٧٢ - ٧٢ + ٧١ - ٧٢ = ع ، عندما : ع = ١٨ / ث$$

$$∴ ١٨ = ٢ + ٧١ - ٧٢ ∴ ١٨ = ١٦ - ٧١ - ٧٢ ∴$$

$$∴ (١٨ - ٧٢)(٢ + ٧١) = ٠ ∴ ومنها :  $٨ = ٧٢$  ؛  $٢ = ٧٢$  مرفوض$$

$$∴ س(٨) = (٨) \times \frac{١}{٢} - (٨) \times ٣ + (٨) \times ٢ = ٨ \times ٢ - \frac{١}{٢} = ١٦ - \frac{١}{٢} م$$

(١٢) جسم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة مبتدأ من السكون بحيث

كان :  $د = ٨ - ٧٢ = ع$  ،  $د$  مقاسة بوحدة م/ث ، أوجد

أقصى سرعة للجسيم و زمن الوصول لأقصى سرعة و المسافة المقطوعة حتى هذا الزمن

الحل

$$∴ د = ٨ - ٧٢ = ع ∴ [٨ - ٧٢] = ع ∴$$

$$∴ ع = ٨ - ٧٢ + ٧١ = ع ∴ عندما :  $٧٢ = ٨$  ، فإن :  $ع = ٠$$$

$$∴ ث = ٠ ∴ ع = ٨ - ٧٢ + ٧١ = ع ∴$$

عند أقصى سرعة للجسيم ( أى الجسم يتحركة بسرعة منتظمة )

$$∴ د = ٠ ∴ أى أن :  $٨ - ٧٢ = ٠ ∴ ٨ = ٧٢$$$

و منها :  $٧٢ = ٨$  أو  $٧٢ = ٢$  مرفوض

∴ زمن الوصول أقصى سرعة هو :  $٧٢$  ث

$$∴ أقصى سرعة هى : ع(٢) =  $٨ \times \frac{٢}{٢} - ٢ \times ٨ = ٨ - ١٦ = -٨ م/ث$$$

$$∴ س - س = [٧٢(٢ - ٧٢)] = ع ، الجسم يتحرك من السكون$$

$$∴ س - س = [٧٢(٢ - ٧٢)] = ٠ ∴$$

$$∴ س = ٧٢ - ٧٢ = ع ، س(٢) =  $٨ \times \frac{٢}{٢} - ٢ \times ٨ = ٨ - ١٦ = -٨ م$$$

(١٣) جسم يتحرك فى خط مستقيم من نقطة ثابتة مبتدأ من السكون

بحيث كان :  $د = \frac{٢}{٨} س$  ،  $د$  مقاسة بوحدة م/ث ، س

بالمتر ، أوجد سرعة الجسم عندما يكون :  $س = ٢ م$  ، ثم

أوجد موضعه عندما تكون :  $ع = ٨ م/ث$

الحل

∴ الجسم يتحرك من نقطة ثابتة مبتدأ من السكون

$$∴ \frac{١}{٢} (ع - ع) = [٧٢(٢ - ٧٢)] = ع ∴$$

$$∴ \frac{١}{٢} (ع - ع) = (٠ - ع) ∴ \frac{١}{٨} س = ع ∴ ومنها :  $ع = \frac{١}{٨} س$$$

$$و عندما :  $س = ٢ م$  فإن :  $ع = \frac{١}{٨} \times ٢ = \frac{١}{٤} م/ث$$$

$$∴ ع = \pm \sqrt{٢} م/ث ∴ عندما :  $ع = ٨ م/ث$$$

$$فإن :  $٦٤ = \frac{١}{٨} س ∴ س = ٥١٢ م$  ومنها :  $س = ٥١٢ م$$$

(١٤) جسم يتحرك فى خط مستقيم بسرعة ابتدائية  $٣ م/ث$  من نقطة

ثابتة بحيث كان :  $د = ٦ س + ٤$  ،  $د$  مقاسة بوحدة م/ث ،

س بالمتر ، أوجد ع بدلالة س ، أوجد سرعة الجسم عندما

$$س = ٢ م ثم أوجد س عندما :  $ع = ٨٧ م/ث$$$

الحل

∴ الجسم يتحرك من نقطة ثابتة بسرعة ابتدائية ٣ م / ث

$$\therefore \frac{1}{2} (v - v_0) t = \frac{1}{2} (v - 3) t = 24 \text{ م}$$

$$\therefore \frac{1}{2} (v - 3) t = 24 \text{ م}$$

$$\text{ومنها : } v = 9 \text{ م / ث}$$

$$\text{وعندما : } v = 0 \text{ م / ث} \quad \text{فإن : } 24 = 9 + \frac{1}{2} \times 24 = 24 \text{ م}$$

$$\therefore v = 0 \text{ م / ث} \quad \text{وعندما : } v = 0 \text{ م / ث}$$

$$\therefore 0 = 9 + \frac{1}{2} \times 24 = 24 \text{ م}$$

$$\therefore 0 = 9 + \frac{1}{2} \times 24 = 24 \text{ م}$$

$$\text{ومنها : } v = 3 \text{ م / ث} \quad \text{أ : } v = 3 \text{ م / ث}$$

### حل تمارين عامة صفحة ١٤٦ بالكتاب المدرسى

أختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

(١) إذا كان :  $v = 3 \text{ م / ث}$  فإن الجسم يغير اتجاه

حركته عندما : ....

$$(ب) \quad v = 1 \text{ م / ث}$$

$$(د) \quad v = 0,5 \text{ م / ث}$$

$$(ج) \quad v = 3 \text{ م / ث}$$

الحل

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث} \quad \text{فإن : } v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث} \quad \text{فإن : } v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث} \quad \text{فإن : } v = 3 \text{ م / ث}$$

(٢) إذا كان :  $v = 3 \text{ م / ث}$  فإن : المسافة المقطوعة خلال

الفترة الزمنية :  $t \geq 0$  تكون : ....

$$(ب) \quad 9 \text{ م} \quad (د) \quad 18 \text{ م} \quad (ج) \quad 36 \text{ م} \quad (أ) \quad 0 \text{ م}$$

الحل

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

(٣) إذا كان :  $v = 3 \text{ م / ث}$  فإن : المسافة المقطوعة خلال

الفترة الزمنية :  $t \geq 0$  تكون : ....

$$(ب) \quad 9 \text{ م} \quad (د) \quad 18 \text{ م} \quad (ج) \quad 36 \text{ م} \quad (أ) \quad 0 \text{ م}$$

الحل

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$\therefore v = 3 \text{ م / ث}$$

$$س (١٠) = ١٠ + ١٠ \times ٥ + ١٠ \times ٢,٩ = ٥٥٠$$

$$(٤) \text{ إذا كان : } ع (٧) = \frac{٢}{\pi} \text{ حقا } \left( \frac{٧}{\pi} \right) , \text{ كانت : } س (٢\pi) = ١$$

$$\text{فإن : } س (٧) = \dots$$

$$(ب) \frac{٢}{\pi} \text{ حقا } \left( \frac{٧}{\pi} \right) = ١ -$$

$$(د) \frac{٢}{\pi} \text{ حقا } \left( \frac{٧}{\pi} \right) = ١ +$$

الحل

$$\therefore س = ع (٧) = \left[ \frac{٢}{\pi} \text{ حقا } \left( \frac{٧}{\pi} \right) \right] =$$

$$= \frac{٢}{\pi} \times \frac{٢}{\pi} \text{ حقا } \left( \frac{٧}{\pi} \right) + \theta =$$

$$\therefore س = ١ \text{ عندما : } \pi = ٢ \therefore ١ = \theta + \pi$$

$$\text{ومنها : } \theta = ١ \therefore س = \frac{٢}{\pi} \text{ حقا } \left( \frac{٧}{\pi} \right) = ١ +$$

$$(٥) \text{ إذا كان : } د (٧) = ٤ - \text{ حقا } ٢٧ , \text{ و كان : } ع (٠) = ٢$$

$$, س (٠) = ٣ - \text{ فإن : } س (\pi) = \dots$$

$$(ب) ٣ - (د) ٢ (ع) ٣$$

الحل

$$\therefore د (٧) = ٤ - \text{ حقا } ٢٧ = ع \therefore ٤ - \text{ حقا } ٢٧ =$$

$$\therefore ع = ٤ - \times \frac{١}{\pi} \text{ حقا } ٢٧ + \theta = ٢ \text{ حقا } ٢٧ + \theta$$

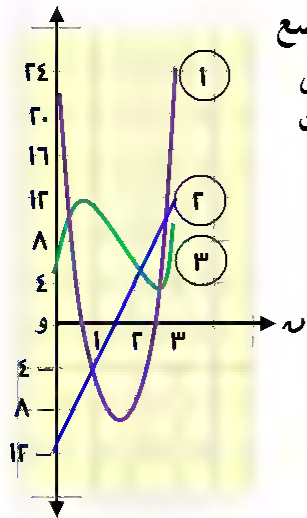
$$\therefore ع (٠) = ٢ \therefore ٢ = ٢ \text{ حقا } ٠ + \theta \therefore ٢ = ٠ \times \frac{١}{\pi} + \theta$$

$$\therefore \theta = ٢ \therefore ع = ٢ \text{ حقا } ٢٧$$

$$, س = \left[ \frac{٢}{\pi} \text{ حقا } ٢٧ = ٢ \times \frac{١}{\pi} \text{ حقا } ٢٧ + \theta = ٢ \text{ حقا } ٢٧ + \theta \right]$$

$$\therefore س (٠) = ٣ - \therefore ٣ - = ٣ - \text{ حقا } ٠ + \theta \text{ ومنها : } \theta = ٣ -$$

$$\therefore س = ٣ - \text{ حقا } ٢٧ = س (\pi) = ٣ - \pi \text{ حقا } ٢٧ = ٣ -$$



(٦) المنحنى المرسوم بالشكل المقابل يمثل موضع

جسيم و متجه سرعته و عجلة الحركة فأى  
الاختيارات ثلاثية تمثل على الترتيب منحنيات  
الموضع - الزمن ، السرعة - الزمن ،  
العجلة - الزمن

$$(ب) ١ ، ٢ ، ٣$$

$$(ب) ٢ ، ٣ ، ١$$

$$(د) ٢ ، ١ ، ٣$$

$$(ع) ٣ ، ٢ ، ١$$

الحل

بملاحظة الشكل المقابل نجد : بالنسبة للمنحنى (٣) :

عند  $س = ١$  توجد قيمة عظمى ، عند  $س = ٣$  توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (١) عند  $س = ٢$  توجد قيمة صغرى

بالنسبة للمنحنى (٢) : لا توجد قيم عظمى أو صغرى

$\therefore$  درجة دالة المنحنى (٣) = درجة دالة المنحنى (١) + ١ ،

درجة دالة المنحنى (١) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١

$\therefore$  المنحنى (٣) يمثل منحنى الموضع - الزمن ،

المنحنى (١) يمثل منحنى السرعة - الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى العجلة - الزمن

و بطريقة أخرى :

بالنسبة للمنحنى (٣) :

فى  $[٠, ٨]$  ،  $[٢, ٢]$  ،  $[٤, ٤]$  : المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

$\therefore$  مشتقة دالته تقع أعلى محور  $س$  فى هاتين الفترتين

عند  $س = ٨$  ،  $س = ٢$  : المماس أفقى

بالنسبة للمنحنى (٣) :

عند  $v = 0$  ،  $a = 3$  : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هاتين النقطتين = 0 .

فى [ ٣ ، ٠ ] : المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور  $v$  فى هذه الفترة و المنحنى (٢) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (٣) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١

بالنسبة للمنحنى (٢) :

فى [ ١,٥ ، ٠ ] : المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور  $v$  فى هذه الفترة

عند  $v = ١,٥$  : المماس أفقى

∴ قيمة مشتقة دالته عند هذه النقطة = 0 .

فى [ ١,٥ ، ٣ ] : المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور  $v$  فى هذه الفترة و المنحنى (١) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (٢) = درجة دالة المنحنى (١) + ١

مما سبق يتضح :

المنحنى (٣) يمثل منحنى الموضع - الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى السرعة - الزمن ،

المنحنى (١) يمثل منحنى العجلة - الزمن

(٨) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :  $s = ٤t$  حتا  $v$

حيث :  $s$  بوحدة سنتيمتر ،  $t$  بالثانية ، أوجد :

(١) ع عندما  $v = \frac{1}{\pi}$  (ب) ح عندما  $v = \pi$

الحل

$$\therefore s = ٤t \quad \therefore \frac{ds}{dt} = ٤ = v \quad \therefore \frac{dv}{dt} = \frac{٤}{\pi} = a$$

∴ قيمة مشتقة دالته عند هاتين النقطتين = 0 .

فى [ ٢,٢ ، ٠,٨ ] : المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور  $v$  فى هذه الفترة و المنحنى (١) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (٣) = درجة دالة المنحنى (١) + ١

بالنسبة للمنحنى (١) :

فى [ ١,٥ ، ٠ ] : المنحنى متناقص ، و ميل المماس سالب

∴ مشتقة دالته تقع أسفل محور  $v$  فى هذه الفترة

عند  $v = ١,٥$  : المماس أفقى ∴ قيمة مشتقة دالته عند هذه النقطة = 0 .

فى [ ١,٥ ، ٣ ] : المنحنى متزايد ، و ميل المماس موجب

∴ مشتقة دالته تقع أعلى محور  $v$  فى هذه الفترة و المنحنى (٢) يحقق ذلك

∴ درجة دالة المنحنى (١) = درجة دالة المنحنى (٢) + ١

مما سبق يتضح : المنحنى (٣) يمثل منحنى الموضع - الزمن ،

المنحنى (١) يمثل منحنى السرعة - الزمن ،

المنحنى (٢) يمثل منحنى العجلة - الزمن

(٧) المنحنى المرسوم بالشكل المقابل يمثل موضع

جسيم و متجه سرعته و عجلة الحركة فأى

الاختيارات الآتية تمثل على الترتيب منحنيات

الموضع - الزمن ، السرعة - الزمن ،

العجلة - الزمن

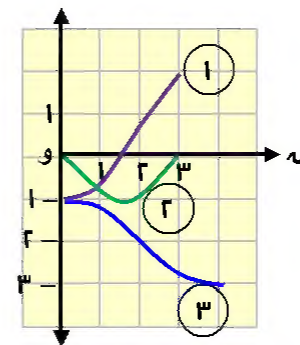
(١) ١ ، ٢ ، ٣

(ب) ٣ ، ٢ ، ١

(ج) ١ ، ٣ ، ٢

(٤) ٢ ، ١ ، ٣

الحل







(II) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :  $\nu - = ( \nu )$  بسرعة ابتدائية قدرها  $٣ م / ث$  من نقطة ثابتة على الخط المستقيم أوجد كلاً من الإزاحة و المسافة المقطوعة خلال الفترة الزمنية  $[ ٤ ، ١ ]$

الحل

$\therefore \nu - = ( \nu )$  ثابتة ،  $ع = ٣ م / ث$   
 $\therefore ع = ع + \nu - = ٣ + \nu -$  ،  $\therefore$  الجسيم يتحرك من نقطة ثابتة  
 $\therefore ف = [ \nu - ( ٣ - \nu ) = \nu - ٣ + \nu ]$   
 و عندما :  $\nu = ٠$  فإن :  $ف = ٠$  ،  $\therefore$   $\nu - = ٣$  ،  $\therefore ف = ٣ - ٠ = ٣$   
 $\therefore ف = [ ٤ ، ١ ]$  ،  $ف = ٤ - ٣ = ١$  ،  $ف = ١ - ٣ = -٢$   
 $\therefore ف = [ ٤ ، ١ ]$  ،  $ف = ٤ - ١ = ٣$  ،  $ف = ١ - ٣ = -٢$   
**حل آخر لإيجاد ف :**

$$ف = [ \nu - ( ٣ - \nu ) = \nu - ٣ + \nu ]$$

$$\nu - = ( ١ - ٣ ) - ( ١٦ - ١٢ ) =$$

$$ع = ٣ ، \text{ عندما } \nu - = ٣ \text{ أى عندما } \nu = ٠$$

$$\text{المسافة المقطوعة} = | ف ( \frac{٣}{٢} ) - ف ( ١ ) | + | ف ( ٤ ) - ف ( \frac{٣}{٢} ) |$$

$$+ | [ ( ١ - ٣ ) - ( \frac{٩}{٤} - \frac{٩}{٢} ) ] | =$$

$$| [ ( \frac{٩}{٤} - \frac{٩}{٢} ) - ( ١٦ - ١٢ ) ] |$$

$$= | \frac{١}{٤} - ٤ | + | \frac{١}{٤} - ٤ | = \frac{١٧}{٤} = ٤.٢٥$$

(II) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :  $\nu - = ٣ - \nu$  حيث ف مقاسة بالمتري ،  $\nu$  بالثانية أوجد كلاً من :  
 (P) عجلة الحركة عندما تنعدم السرعة  
 (ب) سرعته المتوسطة ، متجه السرعة المتوسطة خلال الفترة الزمنية  $[ ٠ ، ٥ ]$

الحل

$\therefore ف = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ١ - \nu = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ١ = ٣$   
 (P)  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$   
 $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$   
 (ب)  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$   
 $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$  ،  $\therefore ع = ٣ - \nu$

$$| ف ( ٢ ) - ف ( ٠ ) | + | ف ( ٠ ) - ف ( ٢ ) |$$

$$= | [ ( ١٢ - ٨ ) - ( ٧٥ - ١٢٥ ) ] | + | [ ٠ - ( ١٢ - ٨ ) ] | =$$

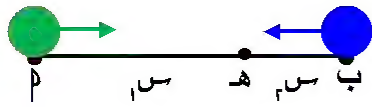
$$= | ٥٨ | + | ٤ | = ٦٢$$

$$\therefore \text{ السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٥٨}{١١,٦} = ٥,٠٠ م / ث$$

$$\text{، الإزاحة الكلية} = ف ( ٠ ) - ف ( ٥ ) = ( ٠ ) - ( ٧٥ - ١٢٥ ) = ٥٠$$

$$\therefore \text{ متجه السرعة المتوسطة} = \frac{\text{المسافة الكلية}}{\text{الزمن الكلى}} = \frac{٥٠}{١٠} = ٥ م / ث$$

(III) جسيم يتحرك فى خط مستقيم طبقاً للعلاقة :  $\nu - = ٣ - \nu$  ، و من موضع يبعد  $٣$  أمتار فى الاتجاه الموجب من نقطة ثابتة على الخط المستقيم بحيث كان :  $\nu - = ٣ + \nu$  فأوجد س عند لحظات انعدام السرعة



بعد مرور ٥ ثوان من تحرك الجسم الأول ،  
مرور ٣ ثوان من تحرك الجسم الثانى  
بالنسبة للجسم الأول :

$$\therefore ع = ٥ \cdot ٩ + ٣ \cdot ٤$$

$$\therefore س = [ ٥ ( ٩ + ٣ ) ] =$$

$$= [ ٥ ( ٩ + ٣ ) ] =$$

$$= ( ٩٥ \times ٥ + ٣٥ \times ٥ ) =$$

$$= ٦٥٠$$

، بالنسبة للجسم الثانى :

الجسم يتحرك بعجلة ثابتة حيث :  $٢ = ٥$  من السكون

$$\therefore ف = ع = ٥ + ٥ \cdot ٥ = ٥٠$$

$$\therefore س = ٥٠ \times ٥ + \frac{٥ \cdot ٥^2}{٢} = ٥٠٠$$

$$= ( ٥٠ \times ٥ ) = ٥٠٠$$

$$\therefore س = ٥٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠$$

أحمد الشنتوي

أحمد الشنتوي

الحل

الجسم يتحرك بعجلة :  $٢ = ٥$  ،  $٢ = ٥$  ،  $٢ = ٥$

$$\therefore ع = ٥ + ٥ \cdot ٥ = ٥٠$$

$$\therefore ع = ٥ + ٥ \cdot ٥ = ٥٠$$

$$\therefore س = ٥٠ \times ٥ + \frac{٥ \cdot ٥^2}{٢} = ٥٠٠$$

$$\therefore س = ٥٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠$$

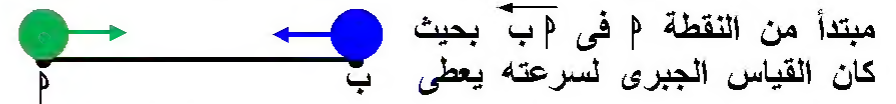
$$\therefore س = ٥٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠$$

$$\therefore ع = ٥ + ٥ \cdot ٥ = ٥٠$$

$$\therefore ع = ٥ + ٥ \cdot ٥ = ٥٠$$

$$\therefore س = ٥٠٠ + ٥٠٠ = ١٠٠٠$$

(١٤) ، ب نقطتان على خط مستقيم واحد تحرك جسم من السكون



كان القياس الجبرى لسرعته يعطى

بالعلاقة :  $ع = ٥ \cdot ٩ + ٣ \cdot ٤$  حيث : ع مقاسة بوحدة

م/ث ،  $٥$  بالثانية ، و بعد ثانيتين من تحرك الجسم الأول

تحرك جسم آخر مبتدأ من النقطة ب فى اتجاه بـ من السكون

بعجلة ثابتة قدرها  $٢$  م/ث فتقابل الجسمان بعد ٥ ثوان من

الحل

بفرض أن : الجسمين يلتقيان عند نقطة هـ

حيث :  $س = ٥$  ،  $س = ٥$  ،  $س = ٥$